

Übungen zu den „Grundlagen der Materialwissenschaft“

Übung 11: Ladungsträgerdichte und Leitfähigkeit

Aufgabe 25: Ladungsträgerdichten im Leitungsband von Halbleitern

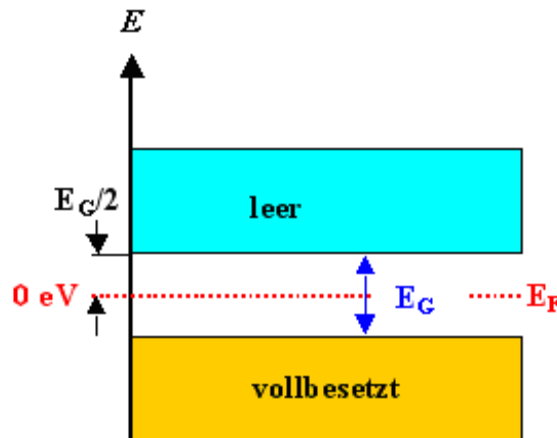


Abbildung 1: Schematisch vereinfachte Bandstruktur eines Materials mit einer Energielücke E_G (G: „gap“) zwischen dem höchsten vollbesetzten Band (Valenzband) und dem nächsthöheren, bei $T = 0 \text{ K}$ vollständig unbesetzten Band (Leitungsband). Zur Lage der Fermi-Energie siehe Aufgabenteil b). Die Abszisse ist bei der hier gezeigten Vereinfachung ohne Bedeutung; sie kann z. B. als Ortskoordinate aufgefaßt werden.

Der spezifische Widerstand von Halbleitern liegt meist im Bereich von $\rho = (0,01\text{--}1.000) \Omega\text{cm}$, Beweglichkeiten liegen im Bereich $\mu = (500\text{--}10.000) \text{ cm}^2/(\text{Vs})$. Als „physikalische Grundlage“ für die folgenden Aufgabenteile soll die in **Abb. 1** gezeigte, sehr stark vereinfachte Bandstruktur dienen.

- a) Wir nehmen vereinfachend an, daß die Elektronen im Leitungsband (dem nominell leeren Band) etwa den halben Beitrag zur Stromleitung liefern (der Beitrag der Löcher im Valenzband zur Leitfähigkeit wird hier nicht explizit betrachtet). Welche Ladungsträgerdichten im Leitungsband bräuchte man, um die Hälfte der den angegebenen Werten entsprechende Leitfähigkeit zu erreichen?

Bei einem Metall läßt sich die Lage der Fermi-Energie für niedrige Temperaturen direkt anhand der grundlegenden Beziehung $f(E_F) = 0,5$ (bzw. im Grenzfall $T \rightarrow 0 \text{ K}$ durch den Sprung der Besetzungswahrscheinlichkeit von 1 auf 0) ermitteln, weil in dem betreffenden Energiebereich viele besetzbare Zustände vorhanden sind; es resultiert ein teilbesetztes Band. Bei einem Halbleiter sind dagegen bei niedrigen Temperaturen die Bänder in dem betreffenden Energiebereich entweder ganz voll oder ganz leer; die Lage der Fermi-Energie läßt sich daher nicht so direkt ermitteln wie bei einem Metall. Gehen Sie zur Ermittlung der Lage von E_F wie folgt vor:

- b) Wählen Sie in Gedanken eine Temperatur, bei der genau ein Elektron den Sprung vom Valenz- ins Leitungsband schafft. Vergleichen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß genau ein Platz im Valenzband nicht besetzt ist (überlegen Sie sich die Formel dafür!), mit der Wahrscheinlichkeit, daß genau ein Platz im Leitungsband besetzt ist. Begründen Sie damit, warum die Fermi-Energie in diesem Fall genau in der Mitte der Bandlücke liegt! (Hinweise: Betrachten Sie einen Übergang von der Oberkante des Valenzbandes, E_V , zur Unterkante des Leitungsbandes, E_L . Gehen Sie dabei vereinfachend davon aus, daß

die effektiven Zustandsdichten von Valenz- und Leitungsband gleich groß sind. Wäre das Valenzband voll besetzt, wäre die zugehörige Wahrscheinlichkeit gleich 1.)

Die für die jeweilige Leitfähigkeit notwendigen Ladungsträger [siehe Aufgabenteil **a)**] gelangen beim intrinsischen Halbleiter im thermischen Gleichgewicht per Band-Band-Übergang aufgrund thermischer Energie aus dem vollbesetzten Valenzband ins (bei $T = 0$ K leere) Leitungsband. Für Silizium gibt es im Leitungsband effektiv Platz für ca. $N_{\text{eff}} = 2 \times 10^{19}$ Elektronen pro cm^3 („effektiv“: bei E_L ; N_{eff} wird „effektive Zustandsdichte“ genannt). Die Fermienergie E_F sei genau in der Mitte der Bandlücke mit der Größe $E_G = E_L - E_V$; darauf setzen wir den Energienullpunkt (siehe **Abb. 1**).

- c) Wie groß müsste bei Raumtemperatur (Näherungswert: 300 K) die Energielücke eines Halbleiters mit einer effektiven Zustandsdichte sein, deren Zahlenwert der von Silizium entspricht, damit die im Aufgabenteil **a)** berechnete Ladungsträgerdichte im Leitungsband resultiert? Wie groß müsste E_G bei 100 K oder 500 K sein? Vergleichen Sie die Ergebnisse, die Sie anhand der Fermiverteilung berechnen, mit denen, die Sie aus der Boltzmann-Näherung erhalten.

Aufgabe 26: Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit

Abbildung 2 zeigt schematisch für verschiedene Materialklassen die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Temperatur (im dekadisch-logarithmischen Maßstab).

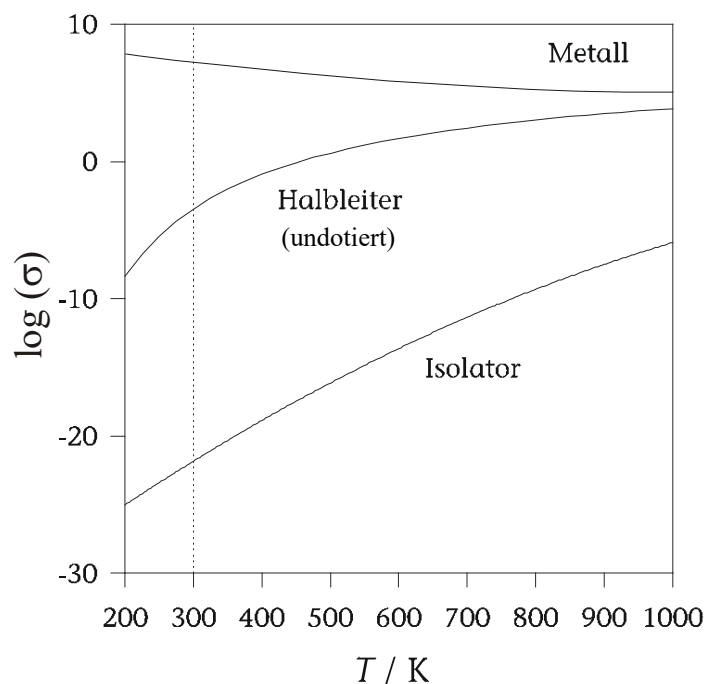


Abbildung 2: Zur Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit verschiedener Materialklassen (dekad.-logar. Maßstab)

- a) Beschreiben Sie qualitativ die jeweilige Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit σ für Metalle, undotierte Halbleiter und Isolatoren anhand von **Abb. 2**.

Die Leitfähigkeit σ lässt sich schreiben als $\sigma = q n \mu$, mit der Ladungsmenge q eines einzelnen Ladungsträgers, der Dichte $n = N/V$ der Ladungsträger (Anzahl N pro Volumen V) sowie ihrer Beweglichkeit μ .

- b) Was bedeutet die Größe „Beweglichkeit“? Erläutern Sie dies anhand ihrer Definition. (Hinweis: Als Proportionalitätskonstante zwischen welchen beiden Größen ist μ eingeführt worden?)

Die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit resultiert aus den Abhängigkeiten der Ladungsträgerdichte und der Beweglichkeit von der Temperatur. Für nicht zu niedrige Temperaturen findet man für die T -Abhängigkeit der Beweglichkeit die Proportionalität $\mu(T) \sim T^{-\alpha}$ mit einem Exponenten $\alpha = 1$ bei Metallen bzw. $\alpha = 1,5$ bei undot. Halbleitern und Isolatoren.

- c) Erläutern Sie anhand der Formel $\sigma = q n \mu$ mögliche mikroskopische Gründe für die qualitativen und quantitativen Unterschiede der in **Abb. 1** gezeigten Temperaturabhängigkeit der spezifischen Leitfähigkeit von Metallen, undotierten Halbleitern und Isolatoren. (Hinweise: Interpretieren Sie Abb. 1 anhand der angegebenen T -Abhängigkeit von μ . Was ergibt sich dann für die Ladungsträgerdichte und ihre Temperaturabhängigkeit? Achten Sie dabei auf den Maßstab der Ordinatenachse von **Abb. 1**.)

Die Temperaturabhängigkeit der Beweglichkeit, $\mu(T) \sim T^{-\alpha}$, ist durch Gitterschwingungen bedingt.

- d) Geben Sie, bei $\mu = e \tau / m$ ansetzend, eine auf klassischer Physik beruhende Abschätzung dafür an, die den Wert 1,5 des Exponenten α bei undot. Halbleitern und Isolatoren erklären kann. [Hinweise: (i) Berücksichtigen Sie den Zusammenhang zwischen freier Weglänge, Stoßzeit und (thermischer) Geschwindigkeit. Warum hier zur Ermittlung von ν_{th} der Gleichverteilungssatz verwendet werden kann, ergibt sich indirekt aus Aufgabe 18 sowie aus Aufgabe 25. (ii) Für die freie Weglänge l gilt ganz allgemein wieder (vgl. Aufgabe 24) $l = (A_{eff} n_{Streu})^{-1}$, wobei n_{Streu} die Anzahldichte und A_{eff} die „eff. Querschnittsfläche“ (Wirkungsquerschnitt) der Streuzentren ist. (iii) Insgesamt kommt es nur auf die Proportionalitäten in der Temperaturabhängigkeit an, nicht auf die absoluten Werte der jeweiligen Größen. (iv) Nehmen Sie zur Abschätzung der Temperaturabhängigkeit von A_{eff} die Schwingungen der Gitteratome um ihre Gleichgewichtslage als harmonisch an; verwenden Sie auch hier den Gleichverteilungssatz.]
- e) Was vermuten Sie als physikalische Ursache dafür, daß α bei Metallen nur 1 ist und nicht 1,5? (Hinweis: Siehe dazu die Physik hinter der Fermi-Verteilung, wie in Aufgabe 18 behandelt, sowie die „Auflösung“ der mit der klassischen Herangehensweise verbundenen Probleme am Ende von Aufgabe 24.)