

Lösungen zur Übung 5.1-1

Illustration

Berechne die mittlere thermische Energie der nachfolgenden Systeme und ziehe Schlussfolgerungen wie angegeben. Über diesen [Link](#) kann man die benötigten Daten finden.

1. Luft bei **300 K**. Es genügt, Stickstoff und Sauerstoff im Verhältnis **80 : 20** zu betrachten; man darf dann auch eine mittlere Masse der Moleküle annehmen.

- Betrachte zunächst nur eine Komponente der Geschwindigkeit, z. B. v_x . Bestimme daraus den Mittelwert von v . Diskutiere den erhaltenen Wert im Lichte bekannter Geschwindigkeiten.

Die Massen sind:

- Sauerstoff **O**: **16** atomare Einheiten (u) = $16 \cdot 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 2,7 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$.
- Stickstoff **N**: **14** atomare Einheiten = $14 \cdot 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 2,4 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$.

- Die Moleküle haben die doppelte Masse; für das Durchschnittsmolekül ergibt sich damit ca. $30 \cdot 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 5,1 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$.

Für Elektrotechniker, [so steht's im Skript](#), reicht die ungefähre Beziehung $U_{\text{therm}} \approx kT$, mit $U_{\text{therm}}(300 \text{ K}) \approx 1/40 \text{ eV}$. Für eine Komponente der Geschwindigkeit haben wir dann $1/3$ der thermischen Energie oder

- $\frac{1}{2}mv_x^2 = 1/120 \text{ eV}$
 $v_x = (1 \text{ eV}/[60 m])^{1/2} = 5,72 \cdot 10^{11} (\text{eV/kg})^{1/2}$
- Die Dimension $(\text{eV/kg})^{1/2}$ ist nicht unbedingt das, was man für Geschwindigkeiten erwartet, aber wir müssen nur die **eV** zu Joule (**J**) konvertieren (der [Link](#) hilft im Zweifel). Wir haben $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ und erhalten damit
- $v_x = 5,72 \cdot 11 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}/\text{kg})^{1/2} = 229 \text{ m/s}$

Für die Gesamtgeschwindigkeit v gilt $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 3v_x^2$ da alle drei Geschwindigkeitskomponenten gleich groß sein müssen.

- Damit ist $v = 3^{1/2}v_x = 396 \text{ m/s}$

Na ja - die bekannte Schallgeschwindigkeit in Luft liegt so um **330 m/s**; wir sind mit dem obigen Wert da nicht so weit weg. Rechnet man genauer (mit Zahl der Freiheitsgrade = **5**) bekommt man die Schallgeschwindigkeit auch nicht viel besser raus - Details dazu in diesem [Link](#).

In welcher Größenordnung muss die Belichtungszeit einer (fiktiven) hochauflösenden Kamera sein, damit ein scharfes Bild entsteht? *Hinweis:* Während der Belichtungszeit sollte sich das Teilchen nur um einen Bruchteil seiner Dimension bewegt haben.

Ein Molekül ist etwa **1 nm** groß (es ist hier etwas kleiner). Damit es nicht verschwommen auf dem "Photo" erscheint, darf es sich höchstens um **0,1 nm** bewegen.

- Die maximale Belichtungszeit (gleich mit der richtigen Schallgeschwindigkeit) ist damit $t_{\text{max}} = 0,1 \text{ nm} \cdot \text{s}/330 \text{ m} = 3 \cdot 10^{-13} \text{ s}$.

Wie weit kommt ein Luftmolekül im Mittel, bevor es mit einem anderen Luftmolekül kollidiert? *Hinweis:* Mittlerer Abstand folgt aus Dichte und Molekülgewicht. Was folgt daraus für die mittlere Zeitdauer zwischen Kollisionen?

Die Dichte von "Luft" ist **1,3 kg/m³**. In **1 m³** sind damit $1,3 \text{ kg}/5,1 \cdot 10^{-26} \text{ kg} = 2,54 \cdot 10^{25}$ "Luft"- Moleküle enthalten.

- Jedes Molekül hat damit $1/2,55 \cdot 10^{25} \text{ m}^3 = 1/2,55 \cdot 10^{25} \cdot 10^{27} \text{ nm}^3 = 39,3 \text{ nm}^3$ Platz zur Verfügung. Der mittlere Abstand d_{Mol} zum nächsten Molekül ist damit $d_{\text{Mol}} = 23 \text{ nm}^{1/3} \text{ nm} = 3,4 \text{ nm}$
- Um diesen Abstand zurückzulegen braucht das Molekül im Mittel die Kollisionszeit $t_{\text{Kol}} = 3,4 \cdot 10^{-9} \text{ ms}/330 \text{ m} = 1,03 \cdot 10^{-11} \text{ s}$.
Um das Gewusel der Moleküle in einem Stück Luft zu "sehen", muss man also recht schnell gucken.

■ Berechne die mittlere thermische Energie der nachfolgenden Systeme und ziehe Schlussfolgerungen wie angegeben. Über diesen [Link](#) kann man die benötigten Daten finden.

■ 2. Wasser bei **300 K**.

- Gehe analog zur Luftaufgabe vor.
- Berechne zusätzlich die ungefähre Rotationsgeschwindigkeit des Moleküls. *Hinweis:* Finde die Formel für die Energie eines mit der Kreisfrequenz ω rotierenden kugelförmigen Körpers.

■ Die Masse eines **H₂O** Moleküls ist **2 u + 16 u = 34 u = $3,06 \cdot 10^{-26}$ kg**. Damit kann man wie oben wieder die Geschwindigkeit rechnen. sie kann nicht sehr verschieden sein vom vorherigem Ergebnis.

■ Um die Rotationsgeschwindigkeit zu bekommen müssen wir etwas genauer hinschauen.

- Die Rotationsenergie E_{rot} einer homogen Kugel mit Radius r , Masse m und Rotationsgeschwindigkeit ω ist gegeben durch $E_{\text{rot}} = 1/5 \cdot m \cdot \omega^2 \cdot r^2$, oder $\omega = (5E_{\text{rot}}/mr^2)^{1/2}$.
- Mit $r = 0,3 \text{ nm}$ (typische Atomgröße), thermische Energie in Elektrotechnik Näherung = $kT = 1/40 \text{ eV}$ bei Raumtemperatur und der Masse wie oben geben, erhalten wir $\omega = ((5/40 \text{ eV}) / 3,06 \cdot 10^{-26} \text{ kg} \cdot 9 \cdot 10^{-2} \text{ nm}^{-2})^{1/2}$.
- Wenn wir gleich noch die Umrechnung **eV - J** einsetzen, ergibt sich $\omega = ((5/40 \text{ eV}) / 3,06 \cdot 10^{-26} \text{ kg} \cdot 9 \cdot 10^{-2} \text{ nm}^{-2})^{1/2} \approx 1 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}$.
- Das sind recht hohe Drehraten im **THz** Bereich. Wir haben aber nicht sehr genau gerechnet, und für größere und schwerere Moleküle sind die Drehraten entsprechend kleiner - man kommt in den Mikrowellenbereich (**GHz**) und kann dort Molekülspektroskopie treiben!