Übungen zu den „Grundlagen der Materialwissenschaft“

Lösungen zur 2. Übung: Mathematische Grundlagen II

Aufgabe 3: Logarithmische Auftragung

(Zur Erinnerung: „Der Logarithmus ist ein Exponent“ – wichtiger Merkspruch!)

a) Im Exponenten von $y = a\mathrm{e}^{bx}$ befindet sich eine lineare Funktion, deren Darstellung ist eine Gerade. Daher liegt eine logarithmische Auftragung der y-Werte nahe; dafür ergibt sich die Beziehung

$$\ln(y) = \ln(a\mathrm{e}^{bx}) = \ln(a) + \ln(\mathrm{e}^{bx}) = \ln(a) + b\ln(\mathrm{e}^{x}) = \ln(a) + bx$$

Ja: Trägt man $\ln(y)$ gegen x auf, so erhält man eine Gerade.

b) Die Konstante b ist die Steigung der Geraden, und die Konstante a erhält man aus dem Schnittpunkt mit der $\ln(y)$-Achse, d. h. für $x = 0$:

$$\ln(y) = \ln(a) + b \cdot 0 = \ln(a) \quad \Leftrightarrow \quad y = a$$

c) Es gilt:

$$y = n^{\log_n y} \quad \Rightarrow \quad \ln(y) = \ln\left(n^{\log_n y}\right) = \log_n(y)\ln(n) \quad \Rightarrow \quad \log_n(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(n)}$$

Daraus folgt mit dem Ergebnis von a):

$$\log_n(y) = \frac{\ln(a) + bx}{\ln(n)} = \frac{\ln(a)}{\ln(n)} + \frac{b}{\ln(n)}x$$

$$\Rightarrow \log_n(y) = \log_n(a) + \frac{b}{\ln(n)}x$$

Die Konstante a bestimmt sich wieder aus dem Schnittpunkt mit der $\log_n(y)$-Achse und b wieder aus der Steigung, die hier $\frac{b}{\ln(n)}$ beträgt.

d) Mit $b = -c$ und $z = x^{-1}$ ist $y = a\exp(-\frac{c}{x}) = a\exp(bz)$, und das entspricht genau dem im Aufgabenteil a) behandelten Fall. Bei der Arrheniusdarstellung wird also $\log_{10}(y)$ nicht gegen x, sondern gegen $1/x$ aufgetragen. Nach Aufgabenteil b) ist der Betrag der negativen Steigung dieser Geraden gleich dem freien Parameter c geteilt durch $\ln(10) \approx 2{,}3$.

(Zur Erläuterung: Typischerweise werden Arrheniusdarstellungen bei bestimmten Formen exponentieller Temperaturabhängigkeit verwendet. Dabei ist dann x die Temperatur T, und der freie Parameter c enthält eine für das jeweils untersuchte Material charakteristische Größe; Sinn und Zweck der Arrheniusdarstellung ist typischerweise die Ermittlung speziell deren Wertes. Ein solcher Fall wird uns in einer späteren Übung noch begegnen.)

e) + f) Für $y = ax^b$ ergibt sich durch Logarithmieren:

$$\ln(y) = \ln(ax^b) = \ln(a) + \ln(x^b) = \ln(a) + b\ln(x)$$

Mit einer doppellogarithmischen Auftragung, d. h. $\ln(y)$ gegen $\ln(x)$, ergibt sich auch hier eine Gerade. Die Konstante b erhält man wieder aus der Steigung, dagegen ergibt sich a aus dem Funktionswert bei $x = 1$.

Aufgabe 4: Grundlagen der Beschreibung von Wellen

a) Die Eulersche Formel, $\exp(\mathrm{i}\phi) = \cos(\phi) + \mathrm{i}\sin(\phi)$ (mit der imaginären Einheit i und dem Phasenwinkel ϕ), kann auf unterschiedliche Weise veranschaulicht werden:
(i) Mathematisch gesehen, gibt sie eine komplexe Zahl an, die auf dem Einheitskreis liegt (Kreis mit Radius 1 um den Ursprung des Koordinatensystems in der Ebene der komplexen Zahlen). Wenn sich die reelle Variable ϕ gleichmäßig ändert, bedeutet das anschaulich, daß man gleichmäßig auf dem Einheitskreis herumläuft; wenn ϕ zunimmt, bewegt man sich im mathematisch positiven Sinn, d. h. gegen den Uhrzeigersinn.
(ii) Elektrotechnisch gesehen, schaut man separat auf Real- bzw. Imaginärteil dieser komplexen Zahl und erhält eine Kosinus- bzw. Sinuskurve. Wenn ϕ proportional zur Zeit ist, dann repräsentieren diese Kurven den zeitlichen Verlauf eines entsprechenden Signals bzw. einer elektrischen Schwingung.
(iii) Physikalisch gesehen, macht man es so, wie es gerade paßt – mal mathematisch, mal elektrotechnisch; zudem kann man diese mathematische Beschreibung bei allen möglichen Schwingungsphänomenen verwenden, und auch in der Quantenmechanik ist sie relevant. Je nach physikalischer Situation ergibt sich eine andere Veranschaulichung.

b) Wir betrachten die Welle zu einem festen Zeitpunkt t_0. Alle Stellen $\vec{r}$, die zum gleichen Wert von $\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t_0$ führen, ergeben den gleichen „Auslenkungswert" der Welle und bilden somit eine Wellenfront. Die zugehörige Gleichung $\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t_0 = \text{const}$ (bzw. $\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const} + \omega t_0$, was auch konstant ist) ist die Normalform einer Ebenengleichung, d. h. $\vec{k}$ und $\vec{r}$ beschreiben eine Ebene, welche senkrecht zu $\vec{k}$ liegt und in der die durch $\vec{r}$ gegebenen Punkte liegen. Weil die Wellenfronten also Ebenen sind, handelt es sich um eine ebene Welle.

c) Es gilt: $A(x + \lambda, t) = A(x, t)$, d.h. $A_0 \exp\{\mathrm{i}(k_x x + k_x\lambda - \omega t)\} = A_0 \exp\{\mathrm{i}(k_x x - \omega t)\}$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{A_0 \exp\{\mathrm{i}(k_x x + k_x\lambda - \omega t)\}}{A_0 \exp\{\mathrm{i}(k_x x - \omega t)\}} = \exp\{\mathrm{i}k_x\lambda\}$$

Daraus folgt $k_x\lambda = 2\pi$, denn sonst wäre λ nicht die Wellenlänge.

d) Es gilt: $A(x, t + T) = A(x, t)$, d.h. $A_0 \exp\{\mathrm{i}(k_x x - \omega t - \omega T)\} = A_0(x) \exp\{\mathrm{i}(k_x x - \omega t)\}$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{A_0 \exp\{\mathrm{i}(k_x x - \omega t - \omega T)\}}{A_0 \exp\{\mathrm{i}(k_x x - \omega t)\}} = \exp\{-\mathrm{i}\omega T\}$$

Daraus folgt $\omega T = 2\pi$, denn sonst wäre T nicht die Periodendauer.

e) Weil die x-Achse in Richtung der Wellenausbreitung liegt, vereinfacht sich der Ausdruck für die Phase der Welle zu $k_x x - \omega t = \text{const}$ bzw. $k_x x = \text{const} + \omega t$. Dies liefert explizit die Zeitabhängigkeit der Position der Wellenfront: $x(t) = \widetilde{\text{const}} + \omega t/k_x$. Daraus ergibt sich die Phasengeschwindigkeit v_{Ph} durch Ableitung nach t zu $v_{\mathrm{Ph}} = \omega/k_x = \frac{2\pi}{T}\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{T}$.

f) Zerlegung von $A(x, t_0)$ in in Real- und Imaginärteil: $A(x, t_0) = A_0 \exp\{\mathrm{i}(k_x x - \omega t_0)\} = A_0 \cos(k_x x - \omega t_0) + \mathrm{i}A_0 \sin(k_x x - \omega t_0)$. Hierbei ist ωt_0 die Phasenlage der Welle; ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird $t_0 = 0$ gewählt. Damit ist $\mathrm{Re}\{A(x, t_0)\} = A_0 \cos(k_x x)$ (siehe Abbildung 1); k_x kann als $\lambda = 2\pi/k_x$ eingezeichnet werden. Der Imaginärteil ist gegenüber dem Realteil um $\pi/2$ phasenverschoben (Phasenunterschied zwischen Sinus und Kosinus).

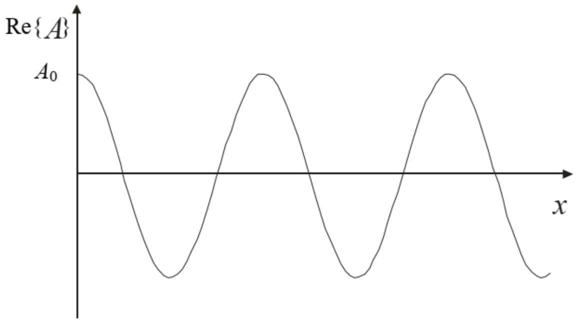

Abbildung 1: Realteil von $A(x,t)$ für den festen Zeitpunkt $t_0 = 0$.

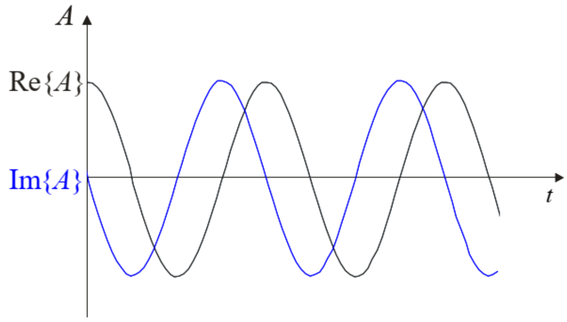

Abbildung 2: Real- und Imaginärteil von $A(x,t)$ am festen Ort $x_0 = 0$.

g) Zerlegung von $A(x_0,t)$ in in Real- und Imaginärteil: $A(x_0,t) = A_0 \exp\{\mathrm{i}(k_x x_0 - \omega t)\} = A_0 \cos(k_x x_0 - \omega t) + \mathrm{i}A_0 \sin(k_x x_0 - \omega t)$. Hierbei ist $k_x x_0$ die Phasenlage der Welle; o. B. d. A. wird $x_0 = 0$ gewählt. Damit hat man $A(0,t) = A_0 \cos(-\omega t) + \mathrm{i}A_0 \sin(-\omega t) = A_0 \cos(\omega t) - \mathrm{i}A_0 \sin(\omega t)$. An einem festen Ort zeigt sich also eine Schwingung mit der Amplitude A_0. Es sind die Phasenverschiebung zwischen Real- und Imaginärteil sowie das Vorzeichen des Imaginärteils zu beachten (siehe Abbildung 2). Hier kann ω als $T = 2\pi/\omega$ eingezeichnet werden.

h) Im Aufgabenteil a) haben wir die Welle zu einem festen Zeitpunkt t_0 betrachtet. Zu einem späteren Zeitpunkt $t_0 + \Delta t$ (wobei hier $\Delta t < T$ gelten soll) ist derselbe Wert des Ausdrucks $\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t_0 =$ const, d. h. dieselbe Wellenfront (Phasenlage der Welle wie zuvor), bei anderen, benachbarten $\vec{r}$ zu finden – die Welle ist weitergelaufen. Die Richtung des Weiterlaufens ergibt sich wie folgt: $\vec{r}\,'$ bezeichne die neuen Positionen der Wellenfront; für diese gilt: $\vec{k} \cdot \vec{r}\,' = \mathrm{const} + \omega(t_0 + \Delta t) = \vec{k} \cdot \vec{r} + \omega \Delta t$, d. h. $\vec{k} \cdot \vec{r}\,' > \vec{k} \cdot \vec{r}$. Das bedeutet, daß die Projektionen aller Ortsvektoren auf $\vec{k}$ größer geworden sind, sie sind also in Richtung von $\vec{k}$ verschoben. Daher ist $\vec{k}$ der Wellenvektor der Welle: Er gibt die Ausbreitungsrichtung an, weil $\lambda = 2\pi/k$ ist – denn eine Ausbreitung schräg zu $\vec{k}$ ergäbe ein falsches λ.

i) Aus der Betrachtung der Phasengeschwindigkeit ergibt sich, daß diese Welle in Richtung $-\vec{k}$ läuft.

j) Diese Gleichung beschreibt eine (unphysikalische) Kugelwelle, die vom Ursprung nach außen läuft. (Sie ist unphysikalisch, weil ihre Amplitude konstant bleibt; das ist aber wegen der Energieerhaltung nicht möglich.)