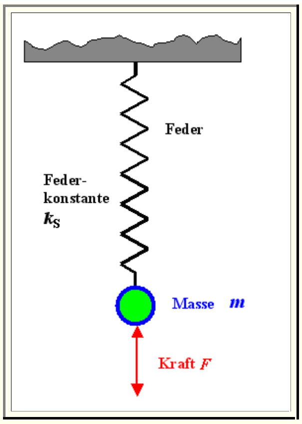
Lösungen zur Übung 2.1.2-1:

Potential einer Feder und Folgerungen

Illustration



Gegeben sei eine *klassische* eindimensionale Feder (Dehnung nur in ***x***-Richtung), an der eine Kraft ***F*** wirken kann, und an die wir ggf. noch eine Masse ***m*** hängen können.

Fragenkomplex 1:

- Eine Kraft ***F*** bewirkt eine Auslenkung Δx (relativ zur Position des Federendes bei $F = 0$) in Richtung der Kraft. Wie ist dann sinnvollerweise die Federkonstante k_{Fed} definiert?
  Hinweis: Eine andere Feder mit der Federkonstanten $2k_{Fed}$ würde bei gleicher Kraft nur um $\Delta x/2$ ausgelenkt werden.
- Die Federkonstante ist definiert als $k_{Fed} = F/\Delta x$.
  Nimmt man als "Feder" einen Stab der Länge l_0, Querschnittsfläche ***A*** und Elastizitätsmodul ***E***, erhält man (mit Spannung $\sigma = F/A$, Dehnung $\epsilon = \Delta l/l_0$, $E = \sigma/\epsilon$)
  $k_{Fed} = E \cdot A/l_0$.
- Wir denken uns jetzt noch die Masse ***m*** angehängt. Die Masse ***m*** ist jetzt durch die Feder an die Decke *gebunden* . Was ist das "Bindungs"potential für die Masse ***m***? Rechnung und Graph!

Es gilt für das Potential ganz allgemein

$$U = \int_{l_0 = 0}^{l} F \cdot dl' = \tfrac{1}{2}k_{Fed} \cdot l^2$$

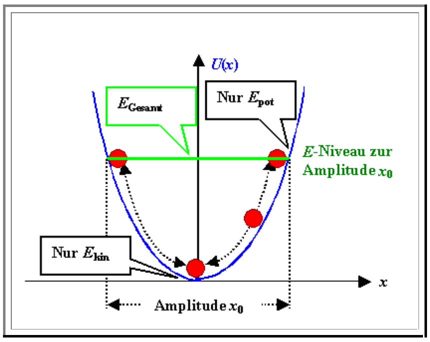
Der Graph ist damit eine schlichte Parabel (s.u.)

- Ändert sich das Bindungspotential wenn die Decke jetzt in ***x*** -Richtung auch verschiebbar ist, aber wir den Nullpunkt geschickt wählen?
- Nein, das Bindungspotential ändert sich nicht. Allenfalls das Minimum der Parabel ist nicht mehr bei Null, das ist aber bedeutungslos solange wir uns immer auf das Δl beziehen.
- Die klassische Feder ist vollkommen *elastisch* . Was bedeutet das wohl?
  Hinweis: Vergleiche den Abstand Masse ***m*** - Decke im kräftefreien Zustand *vor* und *nach* zwischenzeitlichem Anlegen einer *beliebigen* Kraft ***F***.
- Elastisch heißt.
  1. Bei Wegnahme der Kraft zurück auf Ausgangszustand; *keine bleibende Verformung!*
  2. In der Regel haben wir auch lineares Kraft - Auslenkungsgesetz auch für *beliebig große* Auslenkungen.
- Zeichne die Kraft ***F*** - Auslenkung Δx Kurve *direkt* aus der Potentialkurve. Wie macht man das?
- Ableitung einer Parabel = Gerade.

Fragenkomplex 2:

Wenn wir die Masse ***m*** jetzt um ein (beliebiges) Δ***x*** auslenken, und dann loslassen, wird die Masse auf ewige Zeiten eine Schwingung ausführen (weil wir noch keine Dämpfung eingebaut haben).

- Mit welcher Frequenz findet diese Schwingung statt?
  Hinweis : Wir machen hier MaWi; keinePhysik. Man darf das berechen, *muss* aber nicht. Nachschauen im Physikbuch ist erlaubt.
- **1.** Nachschauen im Physikbuch gibt sofort: $\omega = 2\pi\nu = (k_{Fed}/m)^{1/2}$
- **2.** Lösen der relevanten Differentialgleichung $m d^2x/dt^2 + k_{Fed} \cdot x = 0$ mit Ansatz $x = \sin(\omega t)$ führt sofort auf $-\omega^2 m + k_{Fed} = 0$ und damit zur gesuchten Lösung.
- Welche Energie steckt in der Schwingung?
  Wie kann man sich das **Energieniveau** einer Schwingung mit der Auslenkung **2**Δ***x*** in der Potentialkurve sehr anschaulich darstellen?
- Zu jeder Zeit ist die Summe aus potentieller Energie (= Potential) und kin., Energie = Gesamtenergie = const. Das läßt sich graphisch sehr anschaulich darstellen:

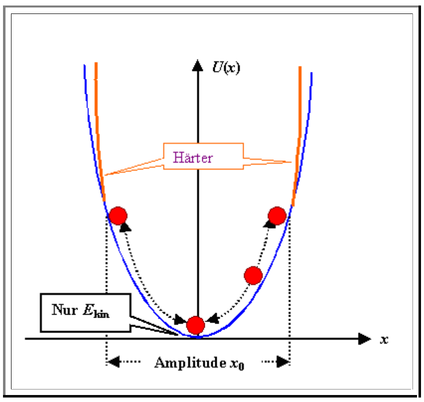


- Zu jeder Amplitude gíbt es ein in denPotentialtopf leicht einzeichenbares Energieniveau = Gesamtenenergie zu jeder Zeit und jeder Position. Da alle Amplituden erlaubt sind, gibt es ein *Kontinuum* an erlaubten ***E***- Niveaus
- Die Masse pendelt jetzt zwischen zwei Positionen. Wo ist sie *im Mittel* ?
  Wie kann man die Kurve der mittleren Position im Potentialbild einzeichnen?
- Man muss über alle horizontalen Linien mitteln, die eine linke und rechte Position verbinden. Da die Parabel symmetrisch ist, liegt der Mittelwert immer bei ***x* = 0**. Die Ortskurve der Mittelwerte ist damit identisch mit der ***U*** - Achse.

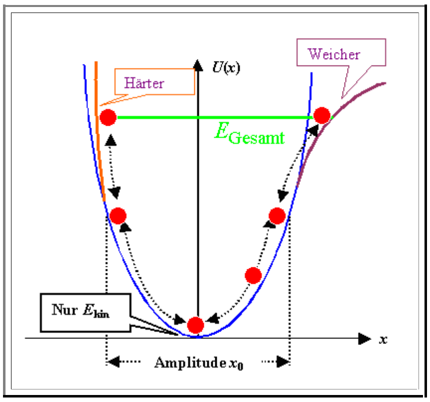
Fragenkomplex 3:

Eine ideale Feder gibt es in der Wirklichkeit nicht. Ziehen wir sie zu lang, oder stauchen wir sie zu sehr, werden wir Probleme bekommen.

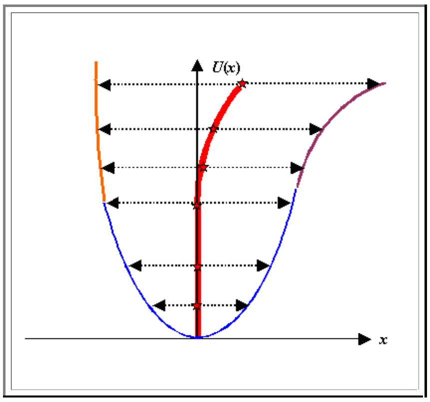
- Skizziere die Potential- und Kraftkurve für eine *reale* Feder, die bei großen und kleinen Auslenkungen sehr viel steifer wird, d.h. ihre Länge trotz weiter zunehmender Kraft kaum mehr ändert. Mache die Übergänge im Potentialbild "weich".
- Das ist einfach. Die Steigung des Potentials muss bei größeren Auslenkungen schneller wachen als be einer Parabel. Das sieht dann so aus wie unten gezeigt. Nach wie vor könnten wir Energieniveaus usw. einzeichnen.



- Skizziere, nur mal so zum Spaß, die Potentialkurve einer Feder, die beim Zusammendrücken hart und immer härter wird, während sie beim Auseinanderziehen immer *weicher* wird bis $k_S \Rightarrow 0$.
- Klarer Fall; sieht aus wie unten gezeichnet.



- Was sich allerdings ändert ist, dass $\boldsymbol{x(t)}$ oder $\mathbf{d}\boldsymbol{x}/\mathbf{d}\boldsymbol{t(t)}$ keine schlichten **sin / cos** Funktionen der Zeit mehr sind. Da aber die Schwingung immer noch periodisch ist, können wir eine Fourierreihe ansetzen: $\boldsymbol{x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t) + x_2 \sin(2\omega t) + \ldots}$. Wir haben in unserer Schwingung jetzt "höhere Harmonische"; bei einem Musikinstrument spricht man von Obertönen.
- Wie ist das in beiden Fällen jetzt mit der im Oszillator steckenden Energie?
  Kann man das immer noch im Potentialbild leicht sehen?
- Schematisch läuft der Massenpunkt immer noch am Potential "hoch" bis zur Stelle größter pot. Energie = Stillstand. Diese Stelle hat links und rechts *per definitionem* (= Energieerhaltung) dieselbe Höhe; sie ist gleich der Gesamtenergie zu jedem Zeitpunkt. Damit können wir wieder das Gesamtenergiveau einzeichnen wie gezeigt.
- Zeichne ein, wo sich die Masse sich *jetzt* je nach Amplitude im Mittel befinden wird, falls sie hin-und-her schwingt ("oszilliert").
- Wie oben ausgeführt , konstruieren wir das erstmal graphisch. Rechnen ist nämlich gar nicht so einfach

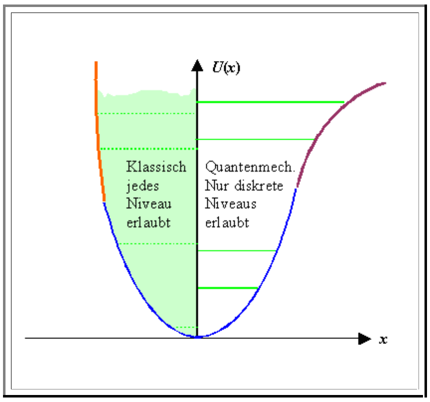


- Die rote Kurve gibt offenbar an, wo die Masse ***m*** sich je nach Amplitude im Mittel befindet.

Fragenkomplex 4:

Wir machen jetzt das System einfach kleiner - so klein wie es irgendwie geht.

- Die Masse ***m*** ist dann ein Atom. Die "Feder" endet auch nicht mehr an der "Decke", sondern am Nachbaratom. Ändert sich was gegenüber den oben untersuchten Fällen?
- Nein - zumindest nicht solange wir klassisch argumentieren und das Potential nutzen, das mit kleinen Abstände härter, und mit großen Abständen weicher wird. Falls die Quantenmechanik, wie der Name ja suggestiert, die Energie quantelt, können wir allenfalls erwarten dass die erlaubten Energieniveaus jetzt irgendwie gequantelt sind, z.B.so:



- Die Federkonstante bekommen wir aus dem ***E***-Modul - siehe oben: $\boldsymbol{k_{Fed} = E \cdot A/l_0}$. dabei ist dann offenbar $\boldsymbol{l_0}$ **=** Bindungslänge oder ungefähr Gitterkonstante bei Kristallen, und $\boldsymbol{A = (l_0)^2}$