

Übungen zu den „Grundlagen der Materialwissenschaft“

Lösungen zu Übung 9: Dielektrika II, Magnetismus

Aufgabe 21: Wirk- und Blindleistung eines Kondensators bzw. Dielektrikums

- a) $Z_C = 1/(i\omega C)$. (Anmerkung: Die imaginäre Einheit i im Nenner sorgt für die richtige Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung. Allgemein hat man den Zusammenhang $U = ZI$, und für ein rein kapazitives Z ist U proportional zu $-iI$, was bedeutet, daß die Spannung dem Strom um $\pi/2$ hinterherläuft.)
- b) Bei jedem Kondensator ist C direkt proportional zu $\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega)$. Für einen Kondensator ganz ohne Dielektrikum ist $\chi = 0$, d. h. $\epsilon_r = 1$, so daß C_0 bereits den Faktor ϵ_0 enthält. Damit bleibt für den Zusammenhang $C = \epsilon_r(\omega) \cdot C_0$ nur der Faktor $\epsilon_r(\omega) = 1 + \chi(\omega)$.
- c) Die Impedanz des Kondensators kann als $Z_C = 1/(i\omega C) = 1/(i\omega \epsilon_r(\omega) C_0) = 1/(i\omega [1 + \chi(\omega)] C_0)$ geschrieben werden. Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung am Kondensator, die zur reinen Blindleistung führt, ist durch diese Impedanz Z_C bereits vollständig erfaßt. Weil also das relevante „ i “ schon explizit bei Z_C drinsteht, darf es kein weiteres geben, sonst ist das Verhalten nicht mehr ideal. Daher trägt beim C im Nenner des Z_C -Ausdrucks nur der Realteil von χ zur Blindleistung bei.
- d) $1/Z_{\text{par}} = 1/Z_{\text{ideal kapazitiv}} + 1/Z_{\text{ideal ohmsch}} = i\omega C + 1/R$.
- e) Es gilt: $\epsilon_r(\omega) = 1 + \chi(\omega) = 1 + \chi'(\omega) - i\chi''(\omega)$ [d. h. $\epsilon_r''(\omega) = \chi''(\omega)$], und damit ist

$$\begin{aligned} 1/Z_{\text{par}} &= i\omega C + 1/R = i\omega \epsilon_r(\omega) C_0 + 1/R \\ &= i\omega [1 + \chi(\omega)] C_0 + 1/R \\ &= i\omega [1 + \chi'(\omega) - i\chi''(\omega)] C_0 + 1/R \\ &= i\omega [1 + \chi'(\omega)] C_0 + \omega \chi''(\omega) C_0 + 1/R. \end{aligned}$$

Ein Imaginärteil von $\chi(\omega)$ führt zu einem Imaginärteil von C , der zu einem zusätzlichen Beitrag im Realteil des komplexen Leitwerts wird. Dieser Realteil enthält standardmäßig den ohmschen Leitanteil und führt daher zu Wirkleistung; also ist mit dem Imaginärteil von χ ebenfalls Wirkleistung verbunden.

- f) Es ist $j(\omega) = \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon(\omega) \frac{\partial E}{\partial t} = \epsilon(\omega) i\omega E = \epsilon_0 [\epsilon_r'(\omega) - i\epsilon_r''(\omega)] i\omega E = \epsilon_0 \omega \epsilon_r''(\omega) E + i\epsilon_0 \omega \epsilon_r'(\omega) E$ (siehe Vorlesung). Vergleicht man dies mit dem rein ohmschen Verhalten $j = \sigma E$, das keine Phasenverschiebung zum Feld aufweist, erhält man $\boxed{\epsilon_0 \omega \epsilon_r''(\omega) = \sigma}$.

Zu den Maßeinheiten: $[\sigma] = \frac{1}{[\rho]} = 1 \frac{1}{\Omega \text{ m}} = 1 \frac{\text{A}}{\text{V m}}, [\epsilon_0] = 1 \frac{\text{F}}{\text{m}} = 1 \frac{\text{C}}{\text{V m}} = 1 \frac{\text{A s}}{\text{V m}}$ und $[\omega] = 1 \text{ s}^{-1}$; $\epsilon_r''(\omega)$ ist einheitenlos. Also: $[\epsilon_0 \omega] = 1 \frac{\text{A s}}{\text{V m}} \frac{1}{\text{s}} = 1 \frac{\text{A}}{\text{V m}} = [\sigma]$. ✓

- g) Die ohmsche Leitfähigkeit kann durch einen zusätzlichen Beitrag im Imaginärteil von $\epsilon_r(\omega)$ berücksichtigt werden.

- h) Im Fall (i) des idealen Dielektrikums gilt $\epsilon_r''(\omega) = \chi''(\omega)$; damit hat man $\sigma_{\text{id. Diel.}} = \epsilon_0 \omega \chi''(\omega)$. Der Fall (ii) eines realen Dielektrikums kann durch eine Parallelschaltung dieser aus dem (bei bestimmten Frequenzen vorhandenen) Imaginärteil der Suszeptibilität eines idealen Dielektrikums resultierenden Leitfähigkeit und der realen ohmschen (Gleichstrom-)Leitfähigkeit beschrieben werden: $\sigma_{\text{real. Diel.}} = \sigma_{\text{id. Diel.}} + \sigma_{\text{Gleichstr.}} = \epsilon_0 \omega \chi''(\omega) + \frac{1}{\rho}$. Damit hat man:
- $$\epsilon_r''(\omega) = \frac{\sigma_{\text{real. Diel.}}}{\epsilon_0 \omega} = \chi''(\omega) + \frac{1}{\epsilon_0 \omega \rho} \quad \text{und} \quad \epsilon_r'(\omega) = 1 + \chi'(\omega).$$
- i) Es ist allgemein $L(\omega) = j(\omega)E = \epsilon_0 \omega \epsilon_r''(\omega)E^2 + i\epsilon_0 \omega \epsilon_r'(\omega)E^2$, d. h. $L_W = \epsilon_0 \omega \epsilon_r''(\omega)E^2$ und $L_B = \epsilon_0 \omega \epsilon_r'(\omega)E^2$ (siehe Vorlesung); daraus wird $L_W = [\epsilon_0 \omega \chi''(\omega) + \frac{1}{\rho}]E^2$ und $L_B = \epsilon_0 \omega [1 + \chi'(\omega)]E^2$.

Zusätzliche Anmerkungen: Im Aufgabenteil h) wurden spezifische Leitwerte mit dem Hinweis auf eine Parallelschaltung addiert. Das stimmt hier zwar, aber nur hier; generell gilt es nicht!¹ Nur tatsächlich parallel fließende Ströme können aufaddiert werden, „parallele Stromdichten“ dagegen nicht – denn der parallel zusätzlich fließende Strom fließt durch seinen eigenen Leiter und erzeugt damit die gleiche Stromdichte (bzw. eine ähnliche; dann müßte ein geeigneter „effektiver Mittelwert“ gebildet werden, um die resultierende Gesamtleitfähigkeit zu erhalten). Nur wenn sich der durch ein gegebenes Material tatsächlich fließende Strom erhöht, erhöht sich damit auch die Stromdichte, und nur dann können auch die zugehörigen Leitfähigkeiten (= spezifische Leitwerte) addiert werden. Das ist hier der Fall: Die Parallelschaltung gibt es nur im Ersatzschaltbild, in der Realität geht es um die Leitfähigkeit ein und desselben Dielektrikums.

Aufgabe 22: Relaxation als Modell für die Frequenzabhängigkeit der Polarisation

- a) In Systemen, die Relaxationsverhalten zeigen, gibt es für das einzelne „Teilchen“ keine rücktreibende Kraft. Vielmehr ergibt sich die Rückkehr in den Grundzustand kollektiv für das gesamte Ensemble durch die Wechselwirkungen mit den Nachbarn.
- b) Zu berechnen ist folgendes Integral:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-i\omega t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau} \Theta(t) \exp(-t/\tau) \exp(-i\omega t) dt \\ &= \frac{1}{\tau} \int_0^{\infty} \exp[-(1/\tau + i\omega)t] dt \\ &= \frac{1}{\tau} \left[\frac{-1}{1/\tau + i\omega} \exp[-(1/\tau + i\omega)t] \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{\tau} \frac{1}{1/\tau + i\omega} = \frac{1}{1 + i\omega\tau}. \end{aligned}$$

¹ Für *alle* spezifischen Größen gilt, daß sie *nicht* einfach so addiert werden können; statt dessen ist immer eine Summationsformel zu verwenden, die sich auf eine jeweils zugehörige additive (= nicht-spezifischen) Größe bezieht.

- c) Zerlegung in Real- und Imaginärteil; dazu ist der Nenner reellwertig zu machen, indem mit seinem komplex Konjugierten erweitert und $(a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$ verwendet wird:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega\tau} = \frac{1 - i\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2};$$
$$\Rightarrow \operatorname{Re} H(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega\tau)^2},$$
$$\operatorname{Im} H(\omega) = \frac{-\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}.$$

Abbildung 1 zeigt schematisch den Real- und Imaginärteil von $H(\omega)$ für einen Relaxationsprozeß. Der Peak im Imaginärteil und der stärkste Abfall im Realteil befinden sich bei $\omega\tau = 1$. Bei dieser Frequenz ist $\operatorname{Re} H(\omega) = \frac{1}{2}$ und $\operatorname{Im} H(\omega) = -\frac{1}{2}$, die Phasenverschiebung beträgt also -45° bzw. $-\pi/4$.

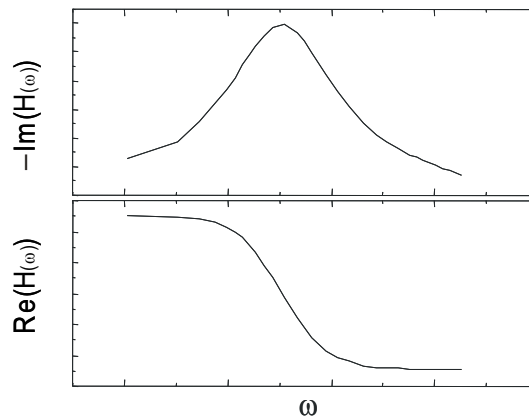


Abbildung 1: Darstellung des Real- und Imaginärteils von $H(\omega)$ in Abhängigkeit von ω für einen Relaxationsprozeß

Aufgabe 23: Dia-, Para- und Ferromagnetismus

- a) In beiden Fällen geht es um eine makroskopische Netto-Dipolmomentendichte, die durch Orientierungspolarisation zustandekommt.
- b) Bei der Orientierungspolarisation ist die resultierende makroskopische Polarisation im Fall ohne äußeres Feld gleich null, weil sich die Polarisation als Summe über alle mikroskopischen Dipolmomente ergibt, es aber ohne äußeres Feld keine Vorzugsrichtung im Raum gibt; die Bewegungen und gegenseitigen Stöße laufen vollkommen zufällig ab, daher liegen alle möglichen Orientierungen der Dipole mit gleicher Wahrscheinlichkeit vor, weshalb sie sich in der Summe gegenseitig aufheben.

Wenn ein äußeres Feld angelegt wird, ist die Polarisation nicht mehr null, sondern es resultiert bei der Summe über alle mikroskopischen Dipolmomente ein endliches Netto-Dipolmoment. Das liegt daran, daß die mikroskopischen Dipole durch das äußere Feld etwas in

Feldrichtung ausgerichtet werden; aufgrund der thermischen Bewegung wirken dem Stöße mit den Nachbarn entgegen. Die Ausrichtung durch das Feld bedeutet sowohl eine Erniedrigung der Gesamtenergie als auch eine Erhöhung der Ordnung, d. h. eine Erniedrigung der Entropie. Der Gleichgewichtszustand und damit die Stärke der resultierenden Nettopolarisation wird daher durch das Minimum der freien Energie bestimmt. Die resultierende Polarisation ist bei nicht zu großen Feldstärken in guter Näherung proportional zur Feldstärke. Nach Abschalten des Feldes führen die Stöße mit den Nachbarn dazu, daß die Polarisation exponentiell auf null abklingt.

- c) Die Atomdichte n kann direkt aus dem molaren Volumen V_m berechnet werden, da jedes Mol genau $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ Atome enthält (N_A : Avogadrozahl). Die Atomdichte von Eisen resultiert zu:

$$n_{\text{Fe}} = \frac{N_A}{V_m} = \frac{6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{7,1 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}} = 8,48 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3} = 8,48 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

- d) Die maximale Magnetisierung ergibt sich zu:

$$M_{\text{max}} = n_{\text{Fe}} \cdot m_{\text{Bohr}} = 8,48 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} \cdot 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2 = 7,86 \cdot 10^5 \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

- e) Es gilt allgemein: $B = \mu_0(H + M)$. Hier ist der Beitrag von $M = M_{\text{max}}$ zu berechnen:

$$\mu_0 \cdot M_{\text{max}} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \cdot 7,86 \cdot 10^5 \frac{\text{A}}{\text{m}} = 4\pi \cdot 7,86 \cdot 10^{-2} \frac{\text{VsA}}{\text{Am}^2} = 0,99 \text{ T}.$$

(Zum Vergleich: Die horizontale Komponente des Erdmagnetfelds beträgt in Deutschland etwa 20 Mikrottesla, die vertikale etwa 44 Mikrottesla; in einem Kernspin-Tomographen werden Magnetfelder von mehreren Tesla verwendet.)

- f) Alle Atome und somit alle Materialien besitzen diamagnetisches Verhalten, weil die inneren, voll mit Elektronen besetzten Schalen kein magnetisches Netto-Moment besitzen und daher diamagnetisch auf ein äußeres Magnetfeld reagieren. Somit ist der Diamagnetismus bei allen anderen Arten von Magnetismus auch immer präsent. Der Effekt ist jedoch an sich sehr klein, und daher kann man ihn in der Regel vernachlässigen, sofern weitere Magnetismusarten – wie z.B. Ferromagnetismus – ebenfalls im Material vorhanden sind.