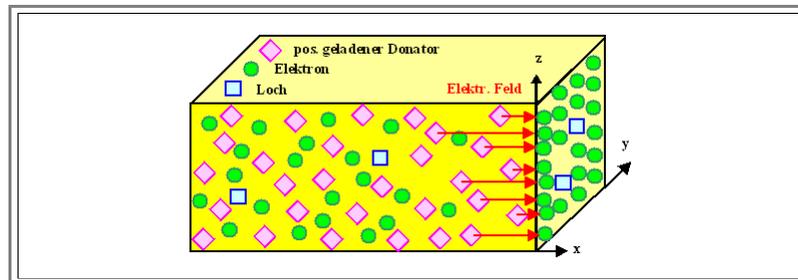


9.3.3 Bandverbiegung und Raumladungszone

Die einfache Sichtweise

Um die genaue Form der Bandverbiegung *berechnen* zu können, tun wir gut daran, uns die Situation ausnahmsweise mal nicht im Banddiagramm, sondern im gewöhnlichen **Ortsraum** anzuschauen.

- Berechnen heißt, die [Poissongleichung](#), in der die Ladungsdichte mit dem elektrischen Potential verknüpft wird, für den betrachteten Fall zu lösen.
- Dazu müssen wir erstmal wissen, wo sich die diversen Ladungen befinden.



Die beweglichen Elektronen sind in Oberflächennähe zurückgedrängt (soweit die Bandverbiegung eben reicht), die wenigen Löcher können wir vergessen – aber was *immer* bleibt, sind die **ortsfesten Dotieratome**, in unserem Fall positiv geladene *Donatoren*.

- Offenbar sind diese ortsfesten positiven Ladungen die Partner der in die Oberfläche gewanderten ehemaligen Volumenelektronen: Von ihnen gehen die **Feldlinien** aus, die auf den negativen Ladungen der Oberfläche enden.
- Im Bereich der Bandverbiegung haben wir also noch eine feste, zeitlich unveränderliche *Verteilung von Ladungen im Raum*, wir nennen das ganz Gebilde von nun an **Raumladungszone RLZ** (engl. **Space Charge Region, SCR**). Die *Raumladungszone* ist ein *fundamentaler Begriff der Halbleitertechnologie*, der in den elementaren Wortschatz gehört.

Die Ausdehnung oder Breite d_{RLZ} der Raumladungszone (=Ausdehnung der Bandverbiegung) ist also letztlich dadurch bestimmt, wie weit man ins Innere des Materials gehen muß, bis man genügend positive geladenen Donatorionen gefunden hat, um die negativen Oberflächenladungen zu kompensieren.

- Es ist also jetzt schon klar, daß in nur leicht dotierten Halbleitern (=wenig Dotieratome) die Raumladungszone breiter sein muß, als in stark dotierten.

Die **Ausdehnung** oder Breite d_{RLZ} der Raumladungszone läßt sich auf *zwei* Arten berechnen

- Wir lösen die zugehörige [Poisson-Gleichung](#). Das werden wir auch – aber noch nicht sofort.
- Wir denken scharf nach und greifen auf etwas zurück, das wir bereits kennen. Das werden wir als erstes versuchen.

Was wir bereits kennen, ist ein **Plattenkondensator**: Zwei Platten mit der Fläche F im Abstand d enthalten die Ladung $\pm Q$, dazwischen ist noch ein nichtleitendes Material mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ_r . Der Kondensator hat die Kapazität C , gegeben durch

$$C = \frac{\epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot F}{d}$$

- Dabei ist ϵ_0 die [dielektrische Suszeptibilität des Vakuums](#). Zwischen den Platten ist dann ein elektrisches Feld $E = -dU/dx$; U ist die anliegende Spannung

??? Was nützt das? Nun ja – das [Bild oben](#) zeigt bei genauer Betrachtung eine Anordnung, die ziemlich viel Ähnlichkeiten mit einem Plattenkondensator aufweist.

- Rechts ist negative Ladung auf einer dünnen "Platte".
 - Links ist positive Ladung; allerdings nicht auf einer Platte, sondern "verschmiert". Das entspricht einer "Verschmierung" des Abstands d der Platten zwischen $d = 0$ und $d = d_{RLZ}$; eine Platte ist sozusagen aus Wellblech.
 - Zwischen den "Platten" ist ein Material, das nur sehr schlecht leitet – denn in der **RLZ** gibt es kaum freie Ladungsträger.
 - Im Material zwischen den "Platten" ist ein elektrisches Feld.
- Mit ein bißchen Nachdenken erkennt man also: Eine Raumladungszone ist einem Kondensator nicht nur ähnlich – sie **ist ein Kondensator**, oder allgemeiner gesagt, sie hat eine in *Farad* meßbare Kapazität.

Das einzige Problem ist der "verschmierte" Plattenabstand. Wir trauen uns einfach mal und beschließen: In so einem Fall nehmen wir einfach einen *mittleren* Plattenabstand $\langle d \rangle = \frac{1}{2} \cdot d_{RLZ}$.

Für die Kapazität unseres **RLZ**-Kondensators haben wir jetzt zwei Gleichungen:

$$C_{RLZ} = \frac{2 \cdot \epsilon_{Si} \cdot \epsilon_0 \cdot F}{d_{RLZ}}$$

$$C_{RLZ} = \frac{Q}{U_K} = \frac{Q}{\Delta E_F / e} = \frac{e \cdot (N_D \cdot F \cdot d_{RLZ})}{\Delta E_F / e} = \frac{e^2 \cdot (N_D \cdot F \cdot d_{RLZ})}{\Delta E_F}$$

Die 1. Gleichung ist klar, die 2. bis nach dem ersten Gleichheitszeichen auch. Was danach kommt, muß vielleicht erklärt werden:

1. Wir *kennen* die an unserem Raumladungskondensator anliegende Spannung U , hier genauer mit $U_K = \text{Kontaktspannung}$ bezeichnet.

- Denn die *Spannung* zwischen zwei Punkten ist die Differenz des *elektrostatischen Potentials* der beiden Punkte, und damit der Unterschied in der *elektrostatischen Energie* dividiert durch die Ladung (= e in unserem Fall).
- Der Unterschied in der elektrostatischen Energie ist aber gerade der Unterschied der Fermienergien vor dem Kontakt (= ΔE_F), denn genau um diesen Betrag haben wir ja die Energieachsen verschoben. Damit gilt $U_K = \Delta E_F / e$.

2. Wieviele Ladungen Q haben wir auf unseren "Platten"?

- Von den negativen Ladung auf der Oberfläche wissen wir es nicht, aber von den positiven Ladungen in der Raumladungszone wissen wir es schon: Es sind genau so viele Elementarladungen, wie wir ionisierte Dotieratome in der **RLZ** haben.
- Falls alle Dotieratome ionisiert sind (wovon wir *jetzt ja immer ausgehen*), braucht man also nur die *Dichte* N_D mit dem Volumen $F \cdot d_{RLZ}$ der Raumladungszone zu multiplizieren, um die Zahl der in der **RLZ** enthaltenen ionisierten Dotieratome zu erhalten; damit es eine Ladung wird muß noch mit e multipliziert werden.

Was wir jetzt im Kasten oben haben sind 2 Gleichungen für die 2 Unbekannten C_{RLZ} und d_{RLZ} .

Die Lösung ist beliebig einfach, wir erhalten

$$d_{RLZ} = \left(\frac{2 \cdot \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \Delta E_F}{e^2 \cdot N_D} \right)^{1/2}$$

$$C_{RLZ} / F = \left(\frac{2 \cdot \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot e^2 \cdot N_D}{\Delta E_F} \right)^{1/2}$$

Das war nicht so schwer! Und wir haben eine relativ einfache Formel für die Weite der **RLZ** erhalten.

- Wie *vorhergesagt*, nimmt d_{RLZ} zu, wenn die Dotierkonzentration abnimmt – mit $(1/N_D)^{1/2}$, um genau zu sein.
- Weiterhin nimmt d_{RLZ} zu, wenn die Differenz der Fermienergien größer wird – auch das ist klar.

Allerdings stehen zwei Fragen im Raum. Erst die einfachere der beiden:

- **Frage 1:** Stimmt das überhaupt? Immerhin haben wir aus der **RLZ** nur durch Tricksen einen Plattenkondensator machen können. Oder anders herum gefragt: Wie gut ist die Gleichsetzung des "mittleren" Abstands der Kondensatorplatten mit der halben **RLZ**-Weite?
- **Antwort:** Die Formel stimmt exakt! Das weiß "man" (und wir gleich auch), aus der Lösung der Poissongleichung für diesen Fall – wir erhalten nämlich das gleiche Ergebnis.
- **Frage 2:** Was ist denn die Dielektrizitätskonstante ϵ_r von **Si**? **Si** ist ja schließlich ein Halbleiter und kein Dielektrikum?
- **Antwort:** *Jedem* Material kann man eine Dielektrizitätskonstante zuschreiben – es ist nur nicht immer sinnvoll, es in einen Kondensator zu stecken. Wir haben das auch schon mal angesprochen.

Wir wollen uns das Leben aber nicht unnötig schwer machen, sondern uns zwei Möglichkeiten zur eindeutigen *Messung* der Dielektrizitätskonstante eines beliebigen Halbleiters überlegen:

- 1. Wir stecken das Material bei $T = 0 \text{ K}$ in den Plattenkondensator. Dann fließt garantiert kein Strom, da alle Halbleiter jetzt Isolatoren sind. Die Dielektrizitätskonstante ist eindeutig meßbar; selbst wenn wir ein bißchen aufwärmen, sollte es noch klappen; wir müssen nur zur Auswertung der Messung dem "reinen" Kondensator den durch die beginnende Leitfähigkeit gebildeten Widerstand parallel schalten und entsprechend berücksichtigen.
- 2. Wir erinnern uns, daß alle Halbleiter für Licht mit $h\nu < E_g$ vollständig durchsichtig sind – und dann einen **Brechungsindex** n_{Opt} haben, der (wie wir wissen sollten) durch folgende Gleichung gegeben wird:

$$n_{\text{Opt}} = \left(\epsilon_{\text{Halbleiter}} \right)^{1/2}$$

- Der Brechungsindex ist also nur eine etwas andere Form der (frequenzabhängigen) Dielektrizitätskonstante. Spätestens damit läßt sich unser gesuchtes ϵ_r auch bei hohen Temperaturen bestimmen.

Was wir finden werden, ist, daß Halbleiter typischerweise relativ große Dielektrizitätskonstanten haben – sie liegen irgendwo zwischen **10 . . . 20**.

- Damit haben wir eigentlich die **Raumladungszone** – ihr Zustandekommen und ihre Ausdehnung – schon ziemlich gut verstanden. Was noch fehlt, ist die formale Berechnung und die genaue Form der Bandverbiegung.
- Jetzt muß eben doch die **Poisson-Gleichung** gelöst werden.

Die formale Sichtweise

Die **Poisson-Gleichung** verkoppelt Ladungsdichten $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ und das elektrostatische Potential $V(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, sie lautet

$$\Delta V = - \frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}$$

- Δ ist der Laplace-Operator; $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$; $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ ist die lokale Ladungsdichte; immer als (vorzeichenrichtige) Summe von positiven und negativen Ladungen im Volumenelement dV bei $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ zu nehmen.
- Für gegebenes $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ erhält man durch zweimalige Integration der Differentialgleichung das elektrostatische Potential, einmalige Integration (oder Differentiation des Potentials) liefert die elektrische Feldstärke

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = - \nabla V(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

Das ist für unseren eindimensionalen Fall eine einfache Übung – so einfach, daß wir es in einer Übungsaufgabe machen. Der Link führt dabei auf eine passende Aufgabe in einem anderen Skript.

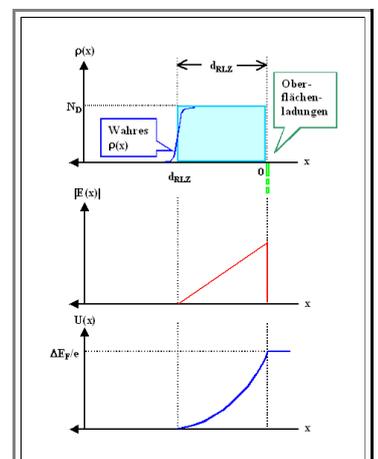
Übung 9.3-1

Lösung der Poissongleichung

Hier schauen wir uns nur an, wie die Lösung prinzipiell aussehen muß:

- Wir haben in der **RLZ** eine konstante Ladungsdichte $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = N_D$; das ist durch das hellblaue Rechteck angedeutet. Außerhalb der **RLZ** ist sie (im Halbleiter) = 0.
- Die negativen Ladungen auf der Oberfläche bilden eine Art Delta-Funktion (grün angedeutet); wir brauchen sie hier aber erstmal nicht zu berücksichtigen.
- Natürlich wird die Ladungsdichteverteilung nicht streng rechteckig sein sondern, wie angedeutet, eine weiche Flanke haben. Aber auch das ignorieren wir erstmal, da es nur minimalen Einfluß auf die Lösungen nimmt.

Zu lösen ist also die eindimensionale Differentialgleichung für eine Ladungskonzentration N_D zwischen $x = 0$ und $x = d_{\text{RLZ}}$.



$$\frac{d^2 V}{dx^2} = - \frac{e N_D(x)}{\epsilon \epsilon_0}$$

● Dazu müssen wir nur zweimal integrieren. Die erste Integration liefert die **Feldstärke**; wir erhalten eine Gerade – wie mit der roten Kurve *qualitativ* angedeutet. Für die *quantitativen* Parameter müssen wir die Übungsaufgabe machen.

● Die zweite Integration liefert das **elektrostatische Potential** oder die **Kontaktspannung**, falls wir das linke Ende auf $U_K = 0$ setzen. Wir erhalten eine *Parabel*. Damit wäre die Form der Bandverbiegung jetzt auch klar.

▶ Zur quantitativen Berechnung braucht man zwei Randbedingungen.

● Eine davon ist auch unmittelbar klar: Die gesamte Potentialdifferenz muß $\Delta E_F/e$ sein, denn das ist die Potentialverschiebung, die bei Gleichgewicht vorliegen muß. Über die zweite denken wir selbst ein bißchen nach – auch sie ist in der Zeichnung enthalten.

● Die Breite der Raumladungszone ergibt sich letztlich aus den Randbedingungen. Qualitativ ist im rechten Bild zwar alles klar, aber um *obige Formel* zu erhalten, muß man jetzt halt rechnen.

▶ Wie versprochen, haben wir aus unserem etwas seltsamen Kontakt von Volumen und Oberfläche eine ganze Menge Honig gesaugt. Aber es ist noch mehr davon da!

● Und darauf wollen wir schnell noch einen kurzen Blick werfen.

Volumen-Oberflächen-Kontakt mit zusätzlicher externer Spannung

▶ Was passiert, wenn wir sowohl das Volumen als auch die Oberfläche mit einem ohmschem Kontakt versehen und dann eine *äußere Spannung* U_{ext} anlegen?

● *Wie* wir das tun, d.h. wie wir Volumen und Oberfläche *kontaktieren*, müssen wir beim Gedankenversuch nicht wissen. Um die Lage einfach zu machen, *erden* wir das Volumen (d.h. wir definieren $V_{Vol} = 0$), so daß nur an der Oberfläche die zusätzliche Spannung $\pm U_{ext}$ anliegt. Mit dem \pm Zeichen soll angedeutet werden, daß man die gesamte Spannung vergrößern oder verkleinern kann – je nach Vorzeichen der angelegten externen Spannung.

● Je nach Vorzeichen der Spannung muß das Vorzeichen des Potentials gewählt werden. Man kann die Konventionen auswendig lernen, oder man kann sich schlicht daran halten, dass pos. Spannung die Elektronen "anzieht", d.h. das Potential senkt. Das bedeutet, daß man in den nachfolgenden Formeln nur das Minuszeichen braucht, falls man U mit Vorzeichen einsetzt; eine negative Spannung führt dann zum $+$.

● Damit haben wir aber auch die zusätzliche elektrostatische *Energie* $-eU_{ext}$ für die Elektronen. Und was das bedeutet, wissen wir schon:

▶ Wir müssen das Banddiagramm der Oberfläche lokal um den Betrag $-eU_{ext}$ verschieben; dazu müssen wir die Bänder *zusätzlich* verbiegen.

● Solange kein Strom fließt, ist alles wie gehabt, wir müssen nur die *externe Spannung* U_{ext} zur *Kontaktspannung* $U_K = -\Delta E_F/e$ addieren, um die gesamte am Kontakt anliegende Spannung U zu erhalten:

$$U = \frac{\Delta E_F}{-e} - U_{ext}$$

● Je nach Vorzeichen von U wird also die insgesamt anliegende Spannung vergrößert oder verkleinert.

▶ Alle Formeln können beibehalten werden, wir müssen nur U_K durch U ersetzen und erhalten

$$d_{\text{RLZ}} = \left(\frac{2 \cdot \epsilon_{\text{Si}} \cdot \epsilon_0 \cdot (\Delta E_{\text{F}} - eU_{\text{ext}})}{e^2 \cdot N_{\text{D}}} \right)^{1/2}$$

$$C_{\text{RLZ}} / F = \left(\frac{2 \cdot \epsilon_{\text{Si}} \cdot \epsilon_0 \cdot e^2 \cdot N_{\text{D}}}{\Delta E_{\text{F}} - eU_{\text{ext}}} \right)^{1/2}$$

- Das ist schon mal nicht schlecht! Wir könnten einen *abstimmbaren Kondensator* bauen! Durch die Größe der anliegenden Gleichspannung kann man die Kapazität des Kontakts ändern und dann das Wechselspannungsverhalten gezielt einstellen, z.B. die Resonanzfrequenz eines Schwingkreises.

 - Aber halt! Leider nur im Gedankenversuch! Wir wollen aber nicht nur gedanklich Radio hören und Fernsehen gucken, sondern real. Dazu müssen wir dann aber in den nächsten Unterkapiteln *reale* Kontakte machen.
- Es bleibt noch mindestens eine Frage, die sich jetzt wieder mit Macht aufdrängen müßte:

 - Kann man die Kontaktspannung U_{K} *messen* – im Gedankenversuch natürlich! Wird ein Voltmeter an unseren ja bereits vorhandenen Kontakten eine Spannung anzeigen?
 - Noch härter gefragt: Kann man mit der Kontaktspannung einen Strom durch einen externen Widerstand treiben? Dann hätten wir ein Perpetuum mobile!
- Damit ist die Antwort auf obige Fragen klar: *Nein* und nochmals *nein*!

 - Nur: Warum die Antwort *nein sein muß*, ohne den **1. Hauptsatz** zu bemühen, ist nicht so recht klar.
 - Die Antwort findet sich for Wagemutige in einem [Extra-Modul](#). Aber erst selbst nachdenken! Hinweis: Man kann Gedankenversuche auch überstrapazieren.
- Wir wollen aber an dieser Stelle jetzt nicht mehr tiefer in die Materie eindringen, sondern dies bei realen Kontakten tun, die wir tatsächlich herstellen können, nicht nur im Gedankenversuch.

Fragebogen
Schnelle Fragen zu 9.3.3