Lösung zur Übung 8.1-2

Berechne Zahlen für v_0, v_D, τ, und *l* der freien Elektronen

1. Aufgabe: Berechne die mittlere thermische Geschwindigkeit v_0 ***(T)*** *klassischer* Elektronen.

- Einfach. Einsetzen in die gegebene Formel ergibt:

$$v_0 = \left(\frac{3k_B T}{m}\right)^{1/2} = \left(\frac{3 \cdot 8{,}6\ 10^{-5} \cdot 300}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}\ \frac{\mathrm{eV \cdot K}}{\mathrm{K \cdot kg}}\right)^{1/2} = 2{,}92 \cdot 10^{14} \cdot \left(\frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{kg}}\right)^{1/2}$$

- Die Einheit "Wurzel aus **eV/kg**" für die Geschwindigkeit ist ein bißchen daneben. Wir haben die "mechanischen" $\mathbf{1\ kg \cdot m^2/s^2 = 1\ J}$ mit k_B ***T*** in **eV** ("atomar") gemessen gemischt; wir müssen also **eV** zu **J** konvertieren (benutze den Link). Wir haben $\mathbf{1\ eV = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}}$ und erhalten:

$$v_0 = 2{,}92 \cdot 10^{14} \cdot \left(\frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{kg \cdot m^2}}{\mathrm{kg \cdot s^2}}\right)^{1/2} = 1{,}17 \cdot 10^5\ \mathrm{m/s} = \mathbf{4{,}2 \cdot 10^5\ km/h}$$

Das ist wohl etwas überraschend. Unsere Elektronen sind nicht langsam. Wir haben einenWert im Bereich**km/s** , wie schon mal behauptet.

- Andererseits: Für ***T*** → **0** würde v_0→ **0** gehen – und das sollte uns zu denken geben!

2. Aufgabe: Berechne die mittlere Stoßzeit τ der Elektronen.

- Die passende Formel ist:

$$\tau = \frac{\sigma \cdot m}{n \cdot e^2}$$

Zunächst brauchen wir Zahlen für die Konzentration ***n*** der Elektronen pro $\mathbf{m^3}$. Dafür vervollständigen wir die gegebene Tabelle. *(Achtung! jetzt immer m statt cm!)* Für die Zahl der Atome = Zahl der Elektronen pro $\mathbf{m^3}$ müssen wir die Dichte durchs Atomgewicht teilen:

Atom	Dichte $[\mathrm{kg \cdot m^{-3}}]$	Atomgewicht $[1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}]$	spezif. Leitfähigk. σ $[10^7\ \Omega^{-1} \cdot \mathrm{m^{-1}}]$	atomare Konzentration $[10^{28}\ \mathrm{m^{-3}}]$
Na	970	23	2,4	2,54
Cu	8.920	64	5,9	8,40
Au	19.300	197	4,5	5,90

- Wir nehmen $\mathbf{5 \cdot 10^{28}\ m^{-3}}$ als eine gute Größenordnung für ***n*** und einen Wert $\sigma = \mathbf{5 \cdot 10^7\ \Omega^{-1}\ m^{-1}}$ als eine mittlere Leitfähigkeit. Wir erhalten:

$$\tau = \frac{5 \cdot 10^7 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}{5 \cdot 10^{28} \cdot (1{,}6 \cdot 10^{-19})^2}\ \frac{\mathrm{kg \cdot m^3}}{\Omega \cdot \mathrm{m \cdot A^2 \cdot s^2}} = 3{,}55 \cdot 10^{-14}\ \frac{\mathrm{kg \cdot m^2}}{\mathrm{V \cdot A \cdot s^2}}$$

In Sekunden **[s]** würde es besser aussehen. Also wieder Einheiten umrechnen!

- Leicht: *Volt* mal *Ampere* = *Watt* = *Leistung* = *Energie pro Zeit* mit der Einheit $\mathbf{1\ J \cdot s^{-1} = 1\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}}$. Einsetzen gibt:

$$\tau = 3{,}55 \cdot 10^{-14} \frac{kg \cdot m^2 \cdot s^3}{kg \cdot m^2 \cdot s^2} = \mathbf{3{,}55 \cdot 10^{-14}\ s = 36\ fs}$$

Das sind recht kurze Zeiten. Für ein klassisches Teilchen viel zu kurz – sagen die Lehrbücher. Aber woher sollen *wir* wissen, was angemessen wäre? Schauen wir mal weiter, dann wird's klarer.

3. Aufgabe: Berechne die oberer Grenze für eine Driftgeschwindigkeit $\mathbf{v_D}$ der Elektronen – indem wir eine sehr hohe Feldstärke von $\boldsymbol{E}$ **= 100 V/m = 1 V/cm** nehmen.

- Einsetzen in die Gleichung mit den jetzt geläufigen Umrechnungen der Maßeinheiten gibt:

$$v_D = \frac{E \cdot e \cdot \tau}{m} = \frac{100 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 3{,}55 \cdot 10^{-14}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}} \frac{V \cdot C \cdot s}{m \cdot kg} = 6{,}24 \cdot 10^{-1} \frac{V \cdot A \cdot s^2}{m \cdot kg}$$

$$v_D = 6{,}24 \cdot 10^{-1} \frac{kg \cdot m^2 \cdot s^2}{m \cdot kg \cdot s^3} = \mathbf{6{,}24 \cdot 10^{-1}\ m/s = 624\ mm/s}$$

Das ist so ungefähr das Höchste der Gefühle, aber verglichen mit der thermischen Geschwindigkeit fast nichts!

- Man solte sich klarmachen, dass eine Feldstärke von**1 V/cm** in einem Metall gigantisch groß ist. Wir rechnen mal schnell die zugehörige Stromdichte $\boldsymbol{j}$ aus:
- Wir haben $\boldsymbol{j} = \sigma \cdot \boldsymbol{E} = 5 \cdot 10^7\ \Omega^{-1}\ m^{-1} \cdot 100\ V/m = 5 \cdot 10^9\ A/m^2 = 5 \cdot 10^5\ A/cm^2$!
- Für eine praktikablere Stromdichte von, sagen wir, $\mathbf{5 \cdot 10^3\ A/cm^2}$ müssen wir die Feldstärke hundertfach reduzieren und erhalten gerade noch $\mathbf{v_D = 6{,}24\ mm/s}$.

4. Aufgabe: Berechne die mittlere freie Weglänge $\boldsymbol{l}$.

- Die Formel ist einfach (und $\mathbf{v_D}$ können wir in der Tat getrost vergessen):

$$l = v_0 \cdot \tau = 1{,}17 \cdot 10^5 \cdot 3{,}55 \cdot 10^{-14}\ m = 4{,}2 \cdot 10^{-9}\ m = \mathbf{4{,}2\ nm}$$

Das ist Unsinn!

- Die Elektronen können sich nicht auf Distanzen, die nicht viel größer als ein Atom sind, mit Defekten etc. stoßen! Die mittlere freie Weglänge sollte deutlich größer sein als errechnet.

Was haben wir falsch gemacht? Hier steht's!

- Elektronen können nicht alle bei $\boldsymbol{T} \to \mathbf{0\ K}$ beliebig langsam werden und dann alle denselben Zustand besetzen. Ein Teil *muss* wg. des **Pauli-Prinzips** auf höheren Zuständen = bei höheren Energien sitzen, d. h. höhere Geschwindigkeiten besitzen – bei jeder vernünftigen Temperatur. Im Endeffekt sind unsere Elektronen deshalb noch *viel schneller* als hier *klassisch* ausgerechnet.
- Sind sie viel schneller, wird die mittlere freie Weglänge größer ⇒ Also: Don't worry, be happy; die Quantentheorie bekommt's hin!