

Lösung zur Übung 5.3-1

Eigenschaften der Fermiverteilung

1. Zeige, daß das Aufweichungsintervall der Fermiverteilung in etwa den Wert $4kT$ hat.

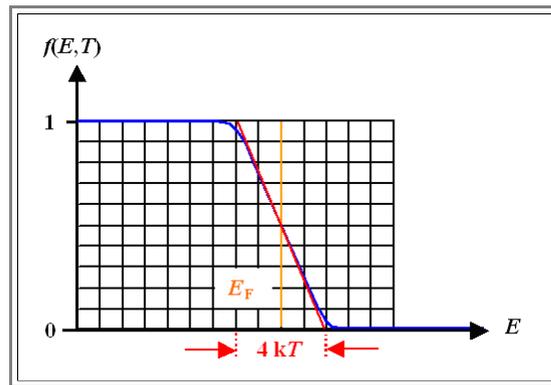
Die Ableitung der Fermiverteilung nach der Quotientenregel ergibt unmittelbar

$$\frac{df(E, T)}{dE} = - \frac{1}{kT} \frac{\exp(-)}{\{\exp(-) + 1\}^2}$$

Für $E = E_F$ wird der Exponent = 1 und wir bekommen

$$\frac{df(E = E_F, T)}{dE} = - \frac{1}{4kT}$$

Ersetzen wir die Fermiverteilung um E_F durch eine Gerade mit der Steigung $-(1/4kT)$, definiert sie gerade ein Aufweichungsintervall von $4kT$ wie unten gezeigt.



2. Zeige, daß für $E \gg E_F$ die Boltzmannnäherung gilt.

Für $E \gg E_F$ und $(E - E_F) \gg kT$ steht im Exponent eine Zahl $\gg 1$

Damit ist $\exp(E - E_F)/kT \gg 1$ und die +1 im Nenner kann vernachlässigt werden. Man erhält

$$f(E \gg E_F, T) \approx \frac{1}{\exp(E - E_F)/kT} = \exp-(E - E_F)/kT$$

Das ist die Boltzmannverteilung!

Für welchen Wert $E - E_F$ ist die Abweichung der Boltzmann-Näherung von der exakten Formel im Bereich $< 10\%$? Was folgt daraus?

Mit $E - E_F = \Delta E$ haben wir.

$$\frac{\exp-\Delta E/kT}{\exp\Delta E/kT + 1} = 1.1 = 1 + \exp-\Delta E/kT$$

- Man erhält sofort

$$\Delta E \geq 2.3 kT$$

- Sobald man also energetisch einige kT oberhalb der Fermienergie "sitzt", ist die Boltzmann-Näherung völlig OK.