

5.3.4 Merkpunkte zu Kapitel 5.3 "Zustandsdichten und Verteilungsfunktionen"

Alle Systeme sind durch eine **Zustandsdichte** $D(E)$ gekennzeichnet

- $D(E)$ wäre für ein diskretes Energieniveau der **Entartungsgrad**.
- Die Zustandsdichte ist eine "doppelte" Dichte: **1.** bezüglich der Energie, und **2.** bezüglich des Volumens (trivial).
- $[D] = \text{eV}^{-1} \cdot \text{cm}^{-3}$

$$D(E) = \frac{dN}{dE} = \text{Zustände im Energieintervall } [E, E + dE] \text{ pro cm}^3$$

Bei gegebener Zustandsdichte entscheidet **nur** die Besetzung der dadurch gegebenen Energieniveaus darüber was das System "tut".

- Zum Gleichgewicht, d.h. dem Minimum der freien Energie $G = U - TS$, gehört eine bestimmte Besetzungssystematik.
- Die Grund- und Schlüsselfrage ist: \Rightarrow

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Platz bei der Energie E besetzt ist?
(für gegebene Parameter wie Temperatur T , Teilchengesamtzahl N_0 , ...)

Die Antwort auf diese Frage muss eine **Verteilungsfunktion** sein

- Es gibt genau **zwei** Verteilungsfunktionen $w(E)$:
- eine für **Bosonen** und eine für **Fermionen**.

Bose-Einstein-Verteilungsfunktion (für Bosonen):
Es können beliebig viele Teilchen = Bosonen auf einem Platz sitzen
(z.B. alle bei $E = 0 \text{ eV}$ bei $T = 0 \text{ K}$)

Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion für Fermionen (z. B. Elektronen):
Es können maximal **2** Elektronen = Fermionen (Spin rauf und runter) auf einem Platz sitzen
(z.B. **nicht** alle bei $E = 0 \text{ eV}$ bei $T = 0 \text{ K}$)

Damit ergibt sich als Haupt- und Grundformel für die Konzentration $n(E)$ an Teilchen bei der Energie $E \Rightarrow$

$$n(E) = \text{Dichte der Plätze mal Wahrscheinlichkeit der Besetzung mal Energieintervall} = D(E) \cdot w(E) \cdot \Delta E$$

Uns interessiert nur die Fermi-Verteilung: wir nennen sie immer $f(E; E_F, T)$

- Wir haben eine Funktion der Energie E mit der Temperatur T und der Fermienergie E_F als Parameter.
- Die Fermienergie ist eine Systemgröße. Sie ist diejenige Energie, bei der die Wahrscheinlichkeit einer Besetzung = $\frac{1}{2}$ ist. (Bei $T = 0 \text{ K}$ und einer kontinuierlichen Zustandsdichte entspricht das der Energie, bei der das letzte Elektron untergebracht werden kann.)

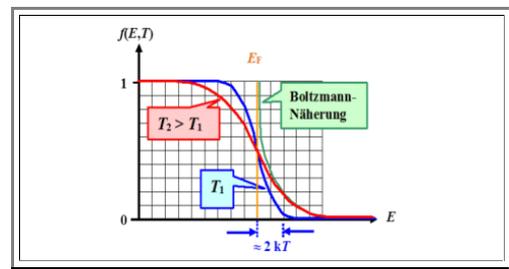
$$f(E; E_F, T) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right) + 1}$$

$$f(E = E_F) = \frac{1}{2}$$

Der Graph der Fermiverteilung sieht - leicht erratbar - so aus ⇒

Die folgende Eigenschaft machen das Arbeiten mit der Fermiverteilung einfach:

- Die "Aufweichungszone" ist $\approx 4 k_B T$ breit.
- Für den "Hochenergieschwanz", d. h. für Energien einige $k_B T$ oberhalb der Fermienergie, kann die Boltzmann-Näherung verwendet werden:



$$f(E, T) \approx \exp \left(- \frac{E - E_F}{k_B T} \right)$$

- Die Boltzmann-Näherung bedeutet immer: Die Teilchen können jetzt "*klassisch*" beschrieben werden.

Die Quintessenz des Ganzen ist:

Die Verteilung von Teilchen auf die verfügbaren Energieplätzen mit der *Fermiverteilung* oder, in klassischer Näherung, mit der *Boltzmannverteilung*, beschreibt immer den Zustand kleinster freier Energie und damit *thermodynamisches Gleichgewicht* (bei der gegebenen Temperatur T).