

5.1.2 Lage der Fermienergie im intrinsischen Halbleiter

Wo liegt die Fermienergie? - Erster Teil

Die wesentliche [Definition der Fermienergie](#) E_F war

$$f(E = E_F) = \frac{1}{2}$$

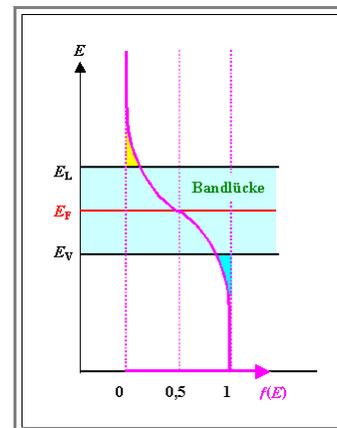
Damit kann man sich sofort - ohne Rechnung - überlegen, wo die Fermienergie beim *intrinsischen* Halbleiter liegen *muß*.

Wir müssen lediglich darauf achten, daß wir bei der Verteilung von "Teilchen" auf die Bänder einen "Erhaltungssatz" nicht verletzen:

- Der Kristall bleibt *elektrisch neutral*, d.h. ungeladen - wir haben *immer* eine **Neutralitätsbedingung**.
- Falls wir n_L Elektronen ins Leitungsband befördern, haben wir jetzt eine *Ladungsdichte* $e \cdot n_L$ an *negativen* Ladungen im Leitungsband. Die Neutralitätsbedingung fordert dann, daß wir genauso viele *positive* Ladungen im Valenzband haben müssen.
- Das ist hier noch ziemlich trivial. Da das vollbesetzte Valenzband elektrisch neutral ist, wird jedes Elektron, das das Valenzband verläßt, dort eine unkompenzierte *positive* Ladung zurücklassen, Die Forderung nach Ladungsneutralität in *intrinsischen* Halbleitern bedeutet deshalb nicht mehr oder weniger, als daß die Dichte der Elektronen im Leitungsband identisch ist zur Dichte der Löcher im Valenzband.
- Wir sind uns dabei natürlich immer im klaren, daß Ausdrücke wie "*im Valenzband*" sich nicht auf einen *Ort* beziehen, sondern auf eine *Energie*.

Diese Aussagen hätten wir natürlich auch gleich machen können - schließlich treten Elektronen im Leitungsband und Löcher im Valenzband *bisher* immer nur paarweise auf. Die Betrachtung über Elektroneutralität ist jedoch allgemeiner und wird noch mal nützlich werden.

- Um jetzt die Lage der Fermienergie zu erhalten müssen nur das [frühere Bild](#) komplettieren - mit Leitungs- und Valenzband, und mit einem der Löcherkonzentration entsprechendem "[Zwickel](#)" im Valenzband. Das ist rechts gezeigt.
- Sofern die Zustandsdichten im Leitungs- und Valenzband auch nur ungefähr gleich "groß" sind, müssen auch die "Zwickel" gleich groß sein.
- Damit liegt wegen der Symmetrie der Fermiverteilung die Fermienergie fest: Sie muß *in der Mitte des verbotenen Bandes* liegen, d.h.



$$E_F \approx \frac{1}{2} \cdot (E_L + E_V)$$

Wir bekommen diese Ergebnis sofort auch in Formeln; wir müssen nur die *notwendige Gleichheit* der beiden Ladungsträgerdichten berücksichtigen, d.h. $n_L = n_V := n_i = \text{intrinsische Ladungsträgerdichte}$

- Damit erhalten wir über die [schon abgeleitete Formel](#) für die Dichten der Elektronen/Löcher

$$\frac{E_L - E_F}{kT} = \frac{E_F - E_V}{kT} \Rightarrow E_F = \frac{E_L + E_V}{2}$$

Da beide Ladungsträgerdichten im intrinsischen Fall gleich groß sein müssen, haben wir eine neue Abkürzung eingeführt, die *intrinsische Ladungsträgerdichte* $n_i(T)$. Sie ist natürlich stark temperaturabhängig, aber trotzdem ein essentieller *Materialparameter*.

Effektive Zustandsdichten

Das war einfach - aber es wird schon noch komplizierter! Für *intrinsische* Halbleiter können wir jetzt die [2. Frage](#) des vorigen Unterkapitels beantworten, indem wir für die Energie der Bandlücke E_G relevante Werte einsetzen (z.B. $E_G = 1,1$ eV für Si).

Die Antwort ist: Der Faktor $T^{3/2}$ verursacht für "normale" Temperaturen *keine* nennenswerte Abweichung von einer Arrheniusgeraden; im [Link](#) ist das graphisch gezeigt.

Damit können wir uns das Leben nun sehr stark vereinfachen: Wir ziehen zur Berechnung der Ladungsträgerdichten alle Faktoren *inklusive der Temperatur vor dem Boltzmannterm* zu einer integralen **effektiven Zustandsdichte** N^{eff} zusammen. Wir erhalten eine (im Prinzip schwach temperaturabhängige) *Zahl*.

Damit lassen sich die Ladungsträgerdichten im Leitungs- bzw. Valenzband um $T = 300$ K in sehr einfacher Weise ausdrücken:

$$\begin{aligned}
 n_L(T) &= n_i(T) & N^{\text{eff}} \cdot & \frac{E_L - E_F}{kT} \\
 &= & \exp - & \\
 \\
 n_V(T) &= n_i(T) & N^{\text{eff}} \cdot & \frac{E_F - E_V}{kT} \\
 &= & \exp - &
 \end{aligned}$$

Will man es ein bißchen genauer haben, läßt man den Faktor $T^{3/2}$ noch außen vor und schreibt

$$N_{\text{eff}} = N^{\text{eff}} \cdot T^{3/2}$$

Ein Beispiel zu Zahlenwerten und der **Temperaturabhängigkeit der effektiven Zustandsdichte**. Für Silizium gilt $N^{\text{eff}} \approx 4.59 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3} \cdot T^{3/2}$, daraus ergibt sich für die effektive Zustandsdichte N_{eff}

T [K]	100	200	300	500	1000
$N_{\text{eff}} [\text{cm}^{-3}]$	$4.59 \cdot 10^{18}$	$1.30 \cdot 10^{19}$	$2.39 \cdot 10^{19}$	$5.13 \cdot 10^{19}$	$1.45 \cdot 10^{20}$

Für eine Änderung der Temperatur um eine Größenordnung erhalten wir also eine Änderung von N_{eff} um etwas mehr als eine Größenordnung.

Für eine Bandlücke E_G von zum Beispiel 1 eV ändert sich aber der Exponentialterm von $4 \cdot 10^{-51}$ auf $9 \cdot 10^{-6}$ falls man die Temperatur um eine Größenordnung variiert - man wird also keinen großen Fehler machen, wenn man im Bereich der Raumtemperatur mit einer ungefähr konstanten effektiven Zustandsdichte $N_{\text{eff}} = 2.4 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ rechnet.

Die Frage ist jetzt natürlich, wie gut die obigen Zahl für die effektive Zustandsdichte ist? Wir können Sie ja über die Ladungsträgerkonzentration auch *messen*.

Die Antwort ist: Ziemlich gut (siehe unten). Gemessene Werte für Si liegen so um einen Faktor zwei unterschiedlich - das ist aber eher Zufall; bei den vielen Näherungen im freien Elektronengasmodell hätte auch ein Faktor 10 noch nicht zur Beunruhigung führen müssen.

Wichtig ist: Diese Gleichungen gelten *immer* (natürlich im Rahmen der gemachten Näherungen; im wesentlichen die Boltzmann Näherung für die Fermiverteilung).

Für die *effektiven Zustandsdichten* nehmen wir natürlich nicht theoretische Näherungswerte, sondern schlicht die *gemessenen* Werte.

Es ist dann ganz natürlich, daß wir für die effektive Zustandsdichte des Leitungsbands N_L^{eff} etwas andere Werte bekommen als für die effektive Zustandsdichte des Valenzbandes N_V^{eff} - schließlich sind auch die [realen Zustandsdichten](#) unterschiedlich.

Was bedeutet das für die Lage der Fermienergie? Nur eine kleine Änderung. Wir erhalten E_F wieder aus der Gleichsetzung von n_L und n_V und erhalten jetzt

$$kT \ln(N_L^{\text{eff}}) - (E_L - E_F) = kT \ln(N_V^{\text{eff}}) - (E_F - E_V) \quad ; \quad E_F = \frac{E_L + E_V}{2} + \frac{kT}{2} \ln(N_V^{\text{eff}}/N_L^{\text{eff}})$$

Dabei sind natürlich für die effektiven Zustandsdichten nur die **Zahlenwerte** einzusetzen; die Maßeinheit ist egal.

Die effektiven Zustandsdichten müssten also (?? nachprüfen) schon ziemlich verschieden sein, bevor sich E_F stark ändert.

Die folgende Tabelle gibt einige Beispiele (aus der Internet Resource [http://www.ioffe.rssi.ru/SVA/NSM/Semicond/..](http://www.ioffe.rssi.ru/SVA/NSM/Semicond/)

Um den Wert bei Raumtemperatur zu erhalten, multipliziert man mit $290^{3/2} \approx 5 \cdot 10^3$.

Halbleiter	Effektive Zustandsdichte [cm ⁻³]	
	Leitungsband	Valenzband
Silizium Si	$6,2 \cdot 10^{15} \cdot T^{3/2}$	$3,5 \cdot 10^{15} \cdot T^{3/2}$
Germanium Ge	$1,98 \cdot 10^{15} \cdot T^{3/2}$	$9,6 \cdot 10^{14} \cdot T^{3/2}$
Galliumarsenid GaAs	komplex	$1,83 \cdot 10^{15} \cdot T^{3/2}$
Galliumphosphid GaP	$3,4 \cdot 10^{15} \cdot T^{3/2}$	$3,6 \cdot 10^{15} \cdot T^{3/2}$
Galliumnitrid GaN	Wurtzite $4,3 \cdot 10^{14} \cdot T^{3/2}$	Wurtzite $48,9 \cdot 10^{14} \cdot T^{3/2}$
	Zinc Blende $3 \cdot 10^{14} \cdot T^{3/2}$	Zinc Blende $8,0 \cdot 10^{14} \cdot T^{3/2}$
Indiumantimonid InP	$1,1 \cdot 10^{14} \cdot T^{3/2}$	$2,2 \cdot 10^{15} \cdot T^{3/2}$
Siliziumcarbid SiC		
Diamant C	$\approx 10^{20}$	$\approx 10^{19}$

Fragebogen / Questionnaire

Multiple Choice Fragen zu 5.1.2

Nur zur Illustration: man kann natürlich immer noch ein bißchen besser nähern; lange Formeln sind im Zeitalter der PC kein Problem mehr. Für **GaAs** ist z.B. folgender Ausdruck gebräuchlich:

$$N^c(\text{GaAs}) = 8.63 \cdot 10^{13} \cdot T^{3/2} \cdot [1 - 1.9310^{-4} \cdot T - 4.19 \cdot 10^{-8} \cdot T^2 + 21 \cdot \exp(-E_{\Gamma L}/(2k_b T)) + 44 \cdot \exp(-E_{\Gamma X}/(2k_b T))] \text{ [cm-3]}$$