Beweglichkeit von Ladungsträgern

Advanced

Bereits bekannte Eigenschaften der Beweglichkeit

- In diesem Modul wollen wir kurz wiederholen und kommentieren, was wir über die Beweglichkeit schon gelernt haben, und dann eine weitere, sehr wichtige Beziehung ableiten
- Kennengelernt haben wir die Beweglichkeit **μ** als die Proportionalitätskonstante zwischen Driftgeschwindigkeit v_D und elektrischem Feld ***E***; es gilt

$$v_D = \mu \cdot E$$

  - Gilt dies univerell? Kann man mit "beliebig" hohen Feldern beliebig hohe Driftgeschwindigkeiten realisieren?
  - Kann man natürlich nicht. Bei sehr hohen Feldern "knallt "entweder das Material durch, oder aber die Driftgeschwindigkeit sättigt schon vorher, d.h sie nimmt erst nicht mehr linear zu, schließlich gar nicht mehr, wenn die Feldstärke weiterhin erhöht wird.
  - Die "Sättigungsbeweglichkeit" kann ein wichtiger Materialparameter sein, sobald man Hochleistungsanwendungen im Auge hat. Hier hat z.B. **SiC** große Vorteile im Vergleich zu anderen Halbleitern.
- Damit war dann schon klar, dass die Beweglichkeit neben der Ladungsträgerkonzentration ***n*** (und natürlich der Ladung ***q***), der zweite für die spezifische Leitfähigkeit σ verantwortliche Materialparameter ist. Wir hatten die Grundformel:

$$\sigma = q \cdot n \cdot \mu$$

- Danach haben wir noch tiefer auf die Bewegung der Ladungsträger mit Masse ***m*** geschaut, und uns klar gemacht, dass die Beweglichkeit unmittelbar mit mittleren freien Weglängen ***l*** und Stoßzeiten **τ** zu tun hat .
  - Dabei war dann die mittlere Geschwindigkeit v_0 der Ladungsträger wichtiger als die Driftgeschwindigkeit v_D, da praktisch immer gilt $v_0 \gg v_D$. Wir hatten

$$\mu = \frac{e \cdot \tau}{m}$$

$$\mu \approx \frac{e \cdot l}{2 \cdot m \cdot v_0}$$

- Physikalische Größen sind immer nur so gut wie ihre Meßbarkeit. Erfreulicherweise ist aber **μ** gut meßbar durch den Hall-Effekt.
  - Eigentlich mißt der Hall-Effekt primär die Ladungsträgerkonzentration ***n***. Zusammen mit dem leicht meßbaren σ bekommt man dann aber sofort auch **μ**.
- Die Beweglichkeit kontrolliert also zusammen mit der *Ladungsträgerkonzentration* die *Leitfähigkeit* und damit eine der wichtigsten technischen Materialeigenschaften
  - Sie verbindet dabei Gefügeeigenschaften ("Defekte") mit den elektronischen Eigenschaften, ist also keine Material*konstante*, die durch das Gefüge nur schwach beeinflußt wird (wie z.B. der Schmelzpunkt oder der Elastizitätsmodul), sondern kann empfindlich von Strukturen abhängen.
  - Das hat Vor- und Nachteile: Einerseits wird man abhängig von z.B. der Materialvorgeschichte, andererseits kann man *designen*, d.h. gezielt ändern.
- Die vielleicht wichtigste Beziehung zwischen der Beweglichkeit und anderen Materialparametern haben wir aber bisher nur postuliert; es ist:
  - Die **Einstein-Smoluchowski Beziehung**; sie koppelt die Beweglichkeit ***n*** eines herumvagabundierenden Teilchens mit seinem Diffusionskoeffizienten ***D***.
  - Die *Einstein-Smoluchowski Beziehung* lautete

$$D = \frac{kT}{e} \cdot \mu$$

- Wir wollen sie im folgenden kurz herleiten.

Herleitung der Einstein-Smoluchowski Beziehung

- Wir betrachten ganz allgemein die *Stromdichte* in einem homogenen Material, das aber einen Gradienten der Teilchenkonzentration n haben soll, und in dem die Teilchen diffundieren, d.h. sich "stochastisch" bewegen.
  - Dann gilt erstmal das 1. Ficksche Gesetz. Es sagt uns, dass die *Teilchen*stromdichte j^{T}_{diff} (noch nicht die elektrisch Stromdichte) von *diffundierenden* Teilchen gegeben ist durch

$$j^{T}_{diff} = -D \cdot \nabla n$$

  - D ist der (i.d.R. stark temperaturabhängige) **Diffusionskoeffizient** der betrachteten Teilchensorte.
- Soweit ist alles klar. Jetzt machen wir aber den nächsten Schritt und betrachten Teichen, die eine elektrische Ladung tragen.
  - Der Teilchensrom j^{T}_{diff} ist dann gleichzeitig auch ein **elektrischer Diffusionstrom** j^{El}_{diff}; er ist gegeben durch

$$j^{El}_{diff} = -q \cdot j^{T}_{diff} = -q \cdot D \cdot \nabla n$$

- Das schauen wir uns aus Gründen der Einfachheit jetzt nur noch *ein*dimensional in x-Richtung für ein Elektron mit Elementarladung (i.e. $q = -e$) an, wir haben also

$$j^{El}_{diff}(x) = e \cdot D \cdot \frac{dn(x)}{dx}$$

- Jetzt haben wir aber ein Problem: In einem Material, das nur so rumliegt, kann es auf Dauer keinen elektrischen (*Netto*)strom geben; auch nicht wenn aus irgendwelchen Gründen ein Ladungsträgergradient vorhanden ist.
  - Ein Stück **Si**, z.B., das einen Dotierstoffgradienten hat, ist zwar (so gut wie) homogen, aber hat dann auch einen Ladungsträgergradienten. Es kann aber offenbar nicht dauernd ein Strom fließen.
  - Was geschieht? Einfach: Der urprünglich fließende Strom ändert die Verteilung der Ladungen und produziert dadurch ein elektrisches Feld $E(x)$ (das wir lila schreiben, um Verwechslungen mit der Energie E auszuschließen), das die Ladungen wieder zurücktreibt.
- Den durch ein elektrisches Feld verursachten **Feldstrom j_{field}** kennen wir aber, er ist immer gegeben durch

$$j_{field} = \sigma \cdot E(x) = e \cdot n(x) \cdot \mu \cdot E(x)$$

- Der gesamte Strom j_{total} ist die Summe dieser beiden Teilströme, er muß **= 0** sein. Wir haben

$$j_{total}(x) = e \cdot n(x) \cdot \mu \cdot E(x) - e \cdot D \cdot \frac{dn(x)}{dx} = 0$$

- Anders geschrieben, müssen die beiden Teilströme entgegengesetzt gleich groß sein, oder

$$e \cdot n(x) \cdot \mu \cdot E(x) = -D^{e} \cdot \frac{dn(x)}{dx}$$

- Soweit , so gut - aber jetzt sitzen wir fest. Um weiter zu kommen, d.h. eine Beziehung zwischen D und μ zu finden, brauchen wir eine weitere Beziehung

- Da wir Gleichgewicht betrachten, nehmen wir die Boltzmannverteilung (im Zweifel als Näherung an die Fermiverteilung). Aber wie?
- Einfach: Wir betrachten statt dem elektrischen Feld die zugehörige *elektrostatische Energie* oder das elektrostatische Potential ***V*(*x*)**. Es ist mit dem Feld über folgende Beziehung verknüpft:

$$E(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$$

Die zugehörige elektrostatische Energie der Teilchen ist **e · *V*(*x*)**; und die Verteilung auf diese Energien regelt die Boltzmannstatistik, d.h. wir haben

$$n(x) = n_0 \cdot \exp \frac{e \cdot V(x)}{kT}$$

Da wir den Gradienten der Konzentration brauchen, differenzieren wir einmal und erhalten

$$\frac{dn}{dx} = n_0 \cdot (e/kT) \cdot \frac{dV(x)}{dx} \cdot \exp \frac{eV(x)}{kT}$$

$$\frac{dn}{dx} = n(x) \cdot (e/kT) \cdot \frac{dV(x)}{dx}$$

- Das Ergebnis setzen wir in unsere Strombilanz von oben ein und erhalten

$$\mu \cdot n(x) \cdot \frac{dV(x)}{dx} = D \cdot (e/kT) \cdot n(x) \cdot \frac{dV(x)}{dx}$$

Siehe da, die Konzentration und der Gradient kürzt sich raus, es bleibt

$$D = \frac{\mu \cdot kT}{e}$$

Das ist die *Einstein-Smoluchowski Beziehung*!

- In Worten sagt sie: Gleichgewicht zwischen einem durch einen Konzentrationsgradienten getriebenen Diffusionstrom und und einem Feldstrom erfordert, dass Diffusionskoeffizient und Beweglichkeit keine unabhängigen Größen sind, sondern durch die gefundene Beziehung gekoppelt sein müssen.