

Energie und Impuls bei Teilchen und Quasiteilchen

Wellenvektoren, Frequenzen und Dispersionsrelationen

Advanced

Wir haben mehrfach direkt oder indirekt gelernt, dass für alle (freien) Teilchen oder Quasiteilchen, die dann immer durch eine ebene Welle mit Wellenvektor $\mathbf{k} = 2\pi/\lambda$ und einer Kreisfrequenz ω beschreibbar sind, in der Quantentheorie für Gesamtenergie E und Impuls \mathbf{p} sehr einfache Gleichungen gelten:

$$E = \hbar \cdot \omega$$

$$\mathbf{p} = \hbar \cdot \mathbf{k}$$

Heißt das, dass alle Teilchen mit demselben Wellenvektor auch dieselbe Energie haben? *Nein* - heißt es nicht, denn die Beziehung zwischen ω und \mathbf{k} ist die **Dispersionsrelation**, und die kann für verschiedene Teilchen sehr verschieden sein.

Schauen wir uns das mal konkret an - für unsere Teilchen *Elektron* und *Photon*, sowie für das Quasiteilchen *Phonon*.

Was wissen wir über die Wellenvektoren, Frequenzen und Dispersionsrelationen für dieses Dreigestirn? Eine ganze Menge, aber wir haben das nie so ganz systematisch dargestellt. Schauen' mer mal; aber nur ganz grob - wir betrachten ausschließlich Größenordnungen.

Photonen. Wir interessieren uns hier nur für Infrarot (**IR**) - Ultraviolett (**UV**), also das Spektrum rund ums sichtbare Licht. Wir haben folgende Eigenschaften:

- Wellenlängen** von Licht, wie oben definiert, *weiß man einfach*. Sie liegen so um **5 μm - 0.1 μm** . Damit haben wir Wellenvektoren im Bereich **($10^6 - 5 \cdot 10^7$) m^{-1}** .
- Frequenzen** weiß man nicht einfach, man kann aber nachschauen, oder sie mit der nachfolgenden Gleichung berechnen. Wir haben jedenfalls $\omega \approx (4 \cdot 10^{14} - 2 \cdot 10^{16}) \text{s}^{-1}$.
- Die Dispersionsrelation des Lichtes kennen wir vielleicht nicht unter diesem Namen, aber [was wir kennen müssen](#) ist die elementare Beziehung

$$c = v \cdot \lambda = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{k} = \frac{\omega}{k}$$

Dabei ist c natürlich die Lichtgeschwindigkeit, also im Vakuum ca. **$3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$** - das weiß man. Und - hey- wir haben hier ja schon eine [Dispersionsrelation](#), eine Beziehung zwischen ω und k für elektromagnetische Wellen (im Vakuum).

Die **freien Elektronen** des Kristalls tummeln sich alle in den ersten [Brillouinzonen](#). Damit wissen wir:

- Die **Wellenvektoren** liegen maximal so um (einige) π/a ; Mit einer Gitterkonstanten a so um **0.3 nm** (*weiß man*), haben die energiereichen Elektronen Wellenvektoren so um **$k = 10^{10} \text{ m}^{-1}$** , und damit Wellenlängen im **nm** Bereich.
- Selbstverständlich kann man im Rahmen des freien Elektronengasmodells auch kleine k 's bis $k = 0$ haben, aber diese Elektronen sind verhältnismäßig uninteressant.
- Die [Dispersionsrelation](#) - diesmal für die Energie - kennen wir, sie lautet

$$E_k = \hbar \cdot \omega_k = \frac{\hbar^2 \cdot k^2}{2m_e}$$

Daraus können wir die **Frequenzen** berechnen und erhalten

$$\omega_k = \frac{\hbar \cdot k^2}{2m_e} \approx \frac{10^{-34} \cdot 10^{20} \text{ J} \cdot \text{s}}{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot \text{m}^2} \approx 5 \cdot 10^{15} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}}{\text{s}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2} \approx 5 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

Wie der Zufall (???) so spielt, ist das dieselbe Größenordnung wie bei den Photonen.

Bleiben noch die **Phononen**. Hier wissen wir gar nichts, es sei denn wir haben den entsprechenden [Fortgeschrittenen Modul](#) gelesen. Falls nicht, tun wir das jetzt. Dann können wir folgende Angaben machen:

- **Wellenvektor:** Ist ähnlich wie bei den Elektronen maximal π/a , d.h. er liegt in der ersten Brillouinzone.
- **Frequenz:** Maximal ca. 10^{13} Hz; die Kreisfrequenz kann dann 10^{14} Hz sein.
- Die Dispersionsrelation für den den einfachst möglichen Fall (nur ein Atom in der Basis) lautet (und das muss man hier einfach glauben):

$$\omega = \left(\frac{2Y \cdot a}{m_a} (1 - \cos(ka)) \right)^{1/2}$$

- Dabei ist Y der Elastizitätsmodul und m_a die Masse des Atoms.

Energie und Impuls

Mit den obigen Zahlen können wir jetzt die Größenordnungen für Energie und Impuls unserer drei Teilchen berechnen.

- Dazu legen wir eine Tabelle an

	Photon	Elektron	Phonon
Wellenvektor k	10^7 m^{-1}	10^{10} m^{-1}	10^{10} m^{-1}
Frequenz ω	$4 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$	$4 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$	10^{14} Hz
Energie $E = \hbar \cdot \omega$	2.4 eV	2.4 eV	0.06 eV
Impuls $p = \hbar \cdot k$	$10^7 \cdot \hbar \cdot \text{m}^{-1}$	$10^{10} \cdot \hbar \cdot \text{m}^{-1}$	$10^{10} \cdot \hbar \cdot \text{m}^{-1}$
$\hbar \approx 6 \cdot 10^{-16} \text{ eV/s}$			

Was lernen wir daraus? Etwas sehr wichtiges: Salopp ausgedrückt gilt:

- **Photonen** haben Energie, aber kaum Impuls.
- **Phononen** haben Impuls, aber kaum Energie.
- **Elektronen** haben Impuls *und* Energie.

Daraus folgt sofort:

- Bei einer Wechselwirkung von nur zwei der drei Teilchen, kann der Impuls- und Energieerhaltungssatz i.a. **nicht** erfüllt werden.
- Deshalb sind z.B. bei der Interaktion von Licht (= Photonen) mit einem Kristall (= freie Elektronen) fast immer auch Phononen beteiligt.