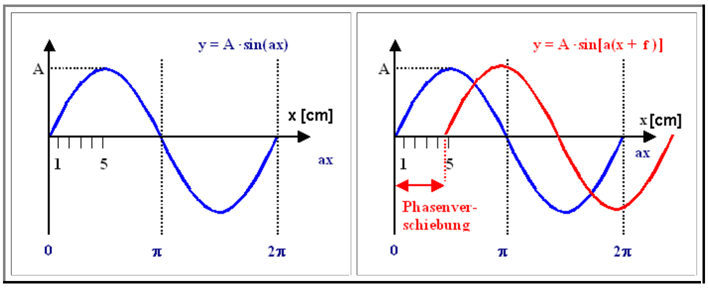
Wellen und Phasen

Basics

- Hier schnell einige Grundbegriffe der Trigonometrie - was genau ist ein **sin(*ax*)**?
  - Ein Sinus beschreibt eine typische **Welle** (oder, genauer, eine Schwingung) sein Graph sieht am einfachsten so aus wie unten links gezeigt:



  - Dabei ist die ***x***-Achse doppelt ausgeführt: Einmal direkt (***x***), und einmal dunkelblau als ***a x***. Wir schreiben den Sinus als

$$y = A \cdot \sin(ax)$$

  - Dann ist ***A*** die Amplitude; und im Argument des Sinus stecken "irgendwie" **Wellenlänge** λ und **Phase** ϕ. Die Variable ***x*** ist in der Maßeinheit **[m]** zu nehmen; der Parameter ***a*** muß damit die Dimension **[1/m]** haben.
- Die Wellenlänge ist die Strecke für einen Durchgang und dafür braucht man immer (vielfache von) **2π** im Argument des Sinus. Nimmt man die Wellenlänge λ statt des Parameters ***a***, schreibt sich der Sinus also so:

$$y = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{a}$$

- Was ist jetzt die **Phase** dieser Schwingung?
  - Das ist eine Frage, die so nicht eindeutig zu beantworten ist, denn die Phase einer Schwingung bezieht sich auf einen definierten Nullpunkt, oder anders gesagt, Phasen sind eigentlich immer *Phasendifferenzen*.
  - Das ist im rechten Bild verdeutlicht, in dem die rote Schwingung gegenüber der blauen phasenverschoben ist. Die rote Schwingung schreibt sich als

$$y = A \cdot \sin[a \cdot (x + f)] = \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot (x + f)\right)$$

  - Dabei ist die Phase als Strecke in **[m]** zu nehmen. Im obigen Bild ist sie ***f*** ≈ **4,7 cm**.
- Was machen wir, wenn wir nicht die Phasenverschiebung als Strecke ***f*** kennen, sondern im (sinnvolleren) Bogenmaß ϕ. Im Beispiel wäre $\phi \approx$ **π/2**?
  - Wir rechnen um, indem wir einfach das Verhältnis der Strecken betrachten. Es gilt:

$$\frac{f}{\lambda} = \frac{\phi}{2\pi}$$

$$\phi = \frac{2\pi \cdot f}{\lambda} = f \cdot a$$

$$y = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot (x + \mathrm{f})\right) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \phi\right)$$

- Damit ist klar, wie die Phasenverschiebung in Kap. 3.4.2 auszurechnen ist.
  - Weiterhin ist klar, wie sich eine Phasenverschiebung in komplexer Schreibweise darstellt. Unsere "normale Welle sieht so aus

$$y(x) = A \cdot \exp\left(i \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right)$$

Dreidimensional

$$y(\underline{r}) = A \cdot \exp\left(i \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \underline{r}\right) = A \cdot \exp(i\underline{kr})$$

- Mit einer Phasenverschiebung **f** oder ϕ wird daraus

$$y(x) = A \cdot \exp\left(i \cdot \frac{2\pi(x + \mathrm{f})}{\lambda}\right) = A \cdot \exp\left(i \cdot \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \cdot \exp\left(i \cdot \frac{2\pi\ \mathrm{f}}{\lambda}\right) = A \cdot \exp\left(i \cdot \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \cdot \exp(i\phi)$$

Dreidimensional

$$y(\underline{r}) = A \cdot \exp\left(i\,\frac{2\pi(\underline{r} + \underline{\mathrm{f}})}{\lambda}\right) = A \cdot \exp\left(i\,\frac{2\pi\underline{r}}{\lambda}\right) \cdot \exp\left(i\,\frac{2\pi\ |\underline{\mathrm{f}}|}{\lambda}\right) = A \cdot \exp\left(i\,\frac{2\pi\underline{r}}{\lambda}\right) \cdot \exp(i\phi) = A \cdot \exp(i\underline{kr}) \cdot \exp(i\phi)$$