Lösung zur Übung 2.2-1

1. Wir starten mit zweimaliger Differentiation der zu verifizierenden Lösung in einer Dimension. Wir erhalten

$$\psi(x) = \left(\frac{1}{L}\right)^{3/2} \cdot \exp(i \cdot k \cdot x)$$

$$\frac{d\psi}{dx} = \left(\frac{1}{L}\right)^{3/2} \cdot i \cdot k \cdot \exp(i \cdot k \cdot x)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \left(\frac{1}{L}\right)^{3/2} \cdot (-1) \cdot k^2 \cdot \exp(i \cdot k \cdot x)$$

- Eingesetzt in die Schrödingergleichung und mit **$(1/L)^{3/2}$ = L*** um Schreibarbeit zu sparen, ergibt sich im Gebiet ***V* = 0**

$$\frac{\hbar^2}{2m_e} \cdot L^* \cdot k^2 \cdot \exp(i \cdot k \cdot x) = E \cdot L^* \cdot \exp(i \cdot k \cdot x)$$

Unser Lösungsansatz ist also dann, und *nur* dann eine Lösung, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

$$E = \frac{\hbar^2 \cdot k^2}{2m_e}$$

- Das ist die postulierte Gleichung für die Gesamtenergie; der erste Teil der Aufgabe ist damit erledigt.

Für den **2.** Teil müssen wir folgendes Integral lösen:

$$\int_0^L\int_0^L\int_0^L (L^*)^2 \cdot \exp(i \cdot k \cdot x) \cdot \exp(-i \cdot k \cdot x) \cdot dxdydz \;\; != \;\; 1 \;\; = (L^*)^2 \cdot \int_0^L\int_0^L\int_0^L dxdydz$$

- Das Integral ist natürlich schlicht **= L^3**; wir erhalten

$$L^3 \cdot (L^*)^2 = L^3 \cdot \frac{1}{(L^{3/2})^2} = 1 \quad \text{q.e.d.}$$

Wir sehen auch, wo die lästigen **3/2** etc. Potenzen herkommen, die fast jede Formel der Quantentheorie verunstalten:

- Die **2** kommt von der immer erforderlichen Quadrierung der Vorfaktoren bei der Betragsquadratbildung der Wellenfunktion, und die **3** oder was immer von den Dimensionen des betrachteten Problems.
- Lästig, unschön, zu Fehlern verführend - aber eigentlich trivial.

Für den dritten Teil müssen wir die Lösung in die Randbedingung einsetzen, d.h.

$$L^* \cdot \exp(i \cdot k_x \cdot x) = L^* \cdot \exp[i \cdot k_x \cdot (x + L)]$$

$$= L^* \cdot \exp(i \cdot k_x \cdot x) \cdot L^* \cdot \exp(i \cdot k_x \cdot L)$$

- Die Gleichungen für $\boldsymbol{k_y}$ und $\boldsymbol{k_z}$ sind natürlich entsprechend. Diese Gleichungen können nur befriedigt werden, falls gilt

$$L^* \cdot \exp(i \cdot k_{x,y,z} \cdot L) = 1$$

$$k_{x,y,z} = n_{x,y,z} \cdot \frac{2\pi}{L}$$

$$n_{x,y,z} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots.$$

- Die Quantenzahlen, die unsere Lösungsmannigfaltigkeit sortieren, kommen also aus den Randbedingungen!