### 2.1.4 Zusammenfassung Kapitel 2.1

- *Vorbemerkung: Hier sind absichtlich keine Links gesetzt. Wer hier etwas nicht sofort versteht, tut gut daran selbst aktiv zu suchen!*

- *Ohmsches* Verhalten bedeutet, dass die Beziehung zwischen Strom ***I*** und elektrischer Spannung ***U*** eines Systems linear ist.
  - Etwas allgemeiner ausgedrückt: Die "Antwort" (= Wirkung) eines Systems auf eine von außen kommende "Störung" des Gleichgewichts (= Ursache) is linear. "Doppelte" Ursache produziert doppelte "Wirkung". Für Spannungen / Ströme gilt dann das "Ohmsche Gesetz":

$$I \propto U \quad \Rightarrow I = \frac{1}{R} \cdot U$$

  - ***R*** ist der Widerstand des Systems.

- Probengeometrieunabhängig und lokal schreibt sich das "Ohmsche Gesetz" für Strom*dichte* $\underline{j}$ und *Feldstärke* $\underline{E}$ wie folgt

$$\underline{j} = \sigma \underline{E}$$

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \text{spez. Leitfähigkeit}$$

  - Dabei ist ρ der spezifische Widerstand; σ (und ρ) sind in der allgemeinsten Form (ortsabhängige) Tensoren **2.** Stufe.
  - Falls das System ein homogenes Material ist, sind ρ (und ρ) Materialparameter oder Material"konstanten".

- Eine elektrische Stromdichte $j_e$ ist immer verursacht durch eine ("mechanische") Stromdichte $j_T$ *geladener* Teilchen; es gilt *immer*

$$j_e = q \cdot j_T \qquad q = \text{Ladung des Teilchens}$$

$$j_T = \text{Zahl Teilchen } N \text{ pro Fläche } F \text{ und Zeit } t = \frac{N}{F \cdot t}$$

  - Je nach Vorzeichen der Ladung fliessen Teilchenströme und elektrische Ströme also in gleicher oder entgegengesetzter Richtung.

- Bei "regellos" umherfliegenden Teiclchen wie z.B in einem Gas, oder hier im "Elektronengas" in einem Metall, werden im Mittel pro Zeiteinheit genauso viele Teilchen von links nach rechts wie von rechts nach links durch eine Referenzfläche fliegen, der *Netto*strom ist dann Null obwohl die *Teil*ströme beachtlich sein können.
  - Ströme lassen sich *immer* wie folgt ausdrücken

| Mechanisch | Elektrisch |
|---|---|
| $j_{mech} = n \cdot v_D$ | $j_{el} = q \cdot j_{mech} = q \cdot n \cdot v_D$ |

  - Mit ***n*** **=** Konzentration der Teilchen $v_D$ **=** Driftgeschwindigkeit = kollektive mittlere Geschwindigkeit senkrecht zur Referenzfläche, ***q*** **=** Ladung der Teilchen.
  - Der Unterschied zwischen der individuellen, ständig nach Betrag und Richtung wechselnden Geschwindigkeit *eines* Teilchens und der *kollektiven* Driftgeschwindigkeit erschließt sich zwanglos aus der Mückenschwarmanalogie.

- Damit gilt für die elektrische Stromdichte *ohmscher* Materialien

$$\underline{j} = q \cdot n \cdot \underline{v}_D := \sigma \cdot \underline{E} \quad \text{für "ohmsche" Materialien}$$

- Daraus folgt zwingend, daß für Materialien, die ohmsches Verhalten zeigen, $\mathbf{v_D}/E$ eine Konstante, und zwar eine *Materialkonstante*, genannt *Beweglichkeit* **µ**, sein muß.

Damit haben wir einen ersten *immer* gültigen Ausdruck für die spez. Leitfähigkeit eines (ohmschen) Mateirels:

$$\sigma = q \cdot n \cdot \mu$$

Es bleibt, die Konzentration ***n*** und die Beweglichkeit **µ** der freien (= beweglichen) Ladungsträger aus mikroskopischen (= atomaren) Materialbetrachtungen zu berechnen.

- Die Konzentration ist zumindest bei Metallen ziemlich klar (einige Elektronen pro Atom), die schwierige Größe ist die Beweglichkeit.
- Aus der Existenz einer *konstanten* (mittleren) Geschwindigkeit im elektrischen Feld folgt aber sofort die Existenz einer Art "Reibung", die auf mikroskopischer Ebene nur durch ständige *Stöße* der beschleunigten Ladungsträger mit "Stoßpartnern" dargestellt werden kann. Stoßpartner sind
  - Andere Elektronen (eher unwichtig)
  - Defekte im Gitter (wichtig)
  - "Phononen", d.h. durch das Gitter laufende elastische Wellen, die als "Quasi"partikel in der Quantentheorie formalisierten thermischen Gitterschwingungen (sehr wichtig).

Damit lassen sich zwei neue, eng verwandte Parameter einführen:

- Die mittlere Zeit $2\tau$ zwischen zwei Stößen und die mittlere freie Weglänge $l = 2\tau \cdot (v_0 + v_D)$ die das Teilchen zwischen **2** Stößen zurücklegt. Dabei ist $v_0$ der Betrag der mittleren Geschwindigkeit eines Teilchens (der individuellen Mücke im Mückenschwarm).
- Aus dem Newtonschen Grundgesetz $F = -q \cdot E = m \cdot dv/dt := m \cdot v_D/\tau$ folgt sofort

$$v_D = -\frac{E \cdot e \cdot \tau}{m}$$

$$\mu = \frac{v_D}{E} = \frac{e \cdot \tau}{m} = \frac{e \cdot D}{kT}$$

$$\sigma = \frac{n \cdot e^2 \cdot \tau}{m} = \frac{n \cdot e^2 \cdot l}{2 \cdot m \cdot (v_0 + v_D)}$$

- Damit ist die elektrische Leitfähigkeit auf sehr elementare Materialeigenschaften zurückgeführt: Konzentrationen von Ladungsträgern und ihre Bewegung von Stoß zu Stoß.

Die Größe Beweglichkeit **µ** ist damit ein Maß für die erreichbare Driftgeschwindigkeit $v_D$, die mittlere Stoßzeit $\tau$, die mittlere freie Weglänge ***l*** und, unter Zuhilfenahme der *Einstein-Smoluchowski Beziehung* $\mu = (D \cdot e) / (kT)$ auch der Diffusionskonstanten ***D*** (in obigen Gleichungen schon eingearbeitet).

- Damit ist die Beweglichkeit ein zentraler Materialparameter!

Wie groß ist die mittlere Stoßzeit oder die mittlere freie Weglänge?

- Das erstere können wir nicht wissen, aber für die mittlere freie Weglänge haben wir ein Gefühl: Sie muß auf jeden Fall deutlich größer sein als typische Atomdurchmesser oder Gitterkonstanten. Wir können jetzt gemessene σ Werte nehmen, und sehen was für mittlere freie Weglängen sich ergeben. Allerdings brauchen wir dazu noch $v_0$.
- Für *klassische* Teilchen im thermischen Gleichgewicht gilt immer, daß jeder Freiheitsgrad die Energie $\frac{1}{2}kT$ aufnimmt, wir haben also

$$E = E_{kin} = \tfrac{1}{2}\, m \cdot v_0^2 = 3/2\, kT$$

$$v_0 = \quad = \left(\frac{3\, kT}{m}\right)^{1/2}$$

- Damit ergibt sich für das kleinstmögliche $l_{min}$; d.h. für $v_D = 0$

$$l_{min} \approx 1\ \text{nm}$$

- Das ist viel zu klein! Da wir keinen Fehler gemacht haben gibt es nur eine logische Schlußfolgerung: Die klassische Physik kann das Phänomen der Leitfähigkeit grundsätzlich *nicht* beschreiben - wir brauchen *Quantentheorie*!

Das ergibt sich auch aus Messungen zum Hall-Effekt, die unabweisbar zeigen, daß sich in manchen Metallen unter bestimmten Voraussetzungen *positive* Ladungsträger bewegen.

- Der Hall-Effekt beschreibt die leicht zu verstehende Tatsache, daß fließende (= Strom tragende) Ladungsträger in einem Magnetfeld abgelenkt werden und damit Spannungen senkrecht zur Stromrichtung induzieren.
- In der optimalen Geometrie (stromverursachendes elektrisches Feld $\boldsymbol{E}_x$ und Magnetfeld $\boldsymbol{B}_z$ senkrecht zueinander) wird eine Hall-Spannung in ***y***-Richtung induziert, das zugehörige elektrische Feld $\boldsymbol{E}_y$ steht senkrecht auf den beiden anderen. Es gilt (für negativ geladene Ladungsträger)

$$E_y = -\mu \cdot E_x \cdot B_z = -\mu \cdot (j_x/\sigma) \cdot B_z = R_{Hall} \cdot B_z \cdot j_x$$

$$R_{Hall} = \pm \frac{\mu}{\sigma}$$

- Der Hall-Effekt erlaubt bei bekanntem (da leicht meßbarem) $\sigma$ die Beweglichkeiten $\boldsymbol{\mu}$ beliebiger Materialien zu messen. Außerdem steckt im Vorzeichen der Hall-Spannung das Vorzeichen der Ladungen die den Strom verursachen. Aus vielen Messungen folgt ebenfalls:
- Die klassische Physik kann das Phänomen der Leitfähigkeit grundsätzlich *nicht* beschreiben - wir brauchen *Quantentheorie*!