

Alternative Ableitung der Zustandsdichte

Advanced

Die Zustandsdichte $D(E)$ der Elektronen ist elementar wichtig. Man kann sie, ohne die Schrödingergleichung zu lösen, ganz schnell ableiten indem man die [Heisenbergsche Unschärferelation](#) als "gottgegeben" hinnimmt.

Die Grundannahme ist, dass **zwei** verschiedene Elektronenzustände sich sowohl im Ort \mathbf{x} als auch im Impuls \mathbf{p} um mindestens $\Delta \mathbf{x}$ und $\Delta \mathbf{p}$ unterscheiden müssen, wie es in der Heisenbergschen Unschärferelation festgelegt ist. Sonst wären die Zustände nicht zu unterscheiden, d.h. man hätte nur einen Zustand.

Die Heisenbergsche Unschärferelation lautet

$$\Delta \mathbf{x} \cdot \Delta \mathbf{p}_x \geq h$$

Beziehen wir das auf den ganzen Raum gilt

$$(\Delta \mathbf{x})^3 \cdot (\Delta \mathbf{p}_x)^3 = h^3$$

Da wir eine Minimalrechnung machen ist das \geq Zeichen jetzt durch ein Gleichheitszeichen ersetzt.

Das kleinstmögliche "Volumen" $(\Delta \mathbf{p}_x)^3$ eines Zustand im *Impulsraum* oder *Phasenraum* ist (mit $(\Delta \mathbf{x})^3 = V =$ betrachtetes Gesamtvolumen)

$$(\Delta \mathbf{p}_x)^3 = \frac{h^3}{V}$$

Alle Zustände mit $|\mathbf{p}'| < |\mathbf{p}|$ füllen im Impulsraum eine Kugel mit dem Volumen $V_p = 4\pi/3 \cdot |\mathbf{p}|^3$. Die Zahl der Zustände $N(|\mathbf{p}|)$ bekommen wir, wie gehabt, indem wir dieses Volumen durch das Volumen h^3/V eines Zustandes teilen. Wir berücksichtigen gleich, dass jeder Zustand wg. Spin **zweimal** zählt, und erhalten

$$N(|\mathbf{p}|) = \frac{2 \cdot 4\pi \cdot |\mathbf{p}|^3 \cdot V}{3h^3}$$

Jetzt brauchen wir noch eine Beziehung zwischen Impuls \mathbf{p} und kinetischer Energie E (andere als [kinetische Energien](#) gibt es beim freien Elektronengas ja nicht). Dafür nehmen wir das klassische $E = \mathbf{p}^2/2m$ mit $m =$ Masse der Elektronen.

Zur Zustandsdichte $D(E) = D(\mathbf{p}(E))$ kommt man durch Substitution von \mathbf{p} durch E , differenzieren nach E (gibt Zustände dE pro dE) und dividieren durch das Volumen V . Wir erhalten

$$D(E) = 4\pi \left(\frac{2 \cdot m}{h^2} \right)^{3/2} \cdot E^{1/2}$$

Das ist [exakt unsere alte Formel](#) (falls man statt h noch $\hbar \cdot 2\pi$ einsetzt).