Lösungen zu Blatt 12

Aufgabe 40: "wahre"Spannung und Dehnung

a) Vergleich

$$\sigma_w = \frac{F}{A}\ , \quad \epsilon_w = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right)$$

$$A = A(\epsilon)\ , \qquad A \leq A_0$$

$\sigma_w > \sigma$:

$$\sigma_w = \frac{F}{A} > \frac{F}{A_0} = \sigma \qquad \text{wegen } A \leq A_0$$

$\epsilon_w < \epsilon$:

$$\epsilon_w = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) = \ln\left(\frac{l_0 + \Delta l}{l_0}\right) = \ln\left(1 + \frac{\Delta l}{l_0}\right)$$

$$\epsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}, \qquad \text{d.h. z.z. } \ln\left(1 + \frac{\Delta l}{l_0}\right) < \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$\Leftrightarrow \ \text{z.z. } 1 + \frac{\Delta l}{l_0} < \exp\left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)$$

wenn man die Exponentialfunktion in einer Reihe entwickelt, folgt für die Ungleichung:

$$\Leftrightarrow \ 1 + \frac{\Delta l}{l_0} < 1 + \frac{\Delta l}{l_0 \cdot 1!} + \left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)^2 \frac{1}{2!} + \ldots$$

$$\Rightarrow \ \epsilon_w < \epsilon$$

b) kleine Spannungen

$$\epsilon_w = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) = \ln\left(\frac{l_0 + \Delta l}{l_0}\right) = \ln\left(1 + \frac{\Delta l}{l_0}\right)$$

Taylorreihe:

$$\ln\left(1+\frac{\Delta l}{l_0}\right) \approx \frac{\Delta l}{l_0} - \frac{(\Delta l)^2}{2l_0^2} + \frac{(\Delta l)^3}{3l_0^3} - \dots$$

$$\text{mit: } a = \frac{\Delta l}{l_0}, \qquad \text{somit } \ln(1+a)$$

$$\frac{\partial(\ln(1+a))}{\partial a} = \frac{1}{1+a}$$

$$\frac{\partial^2(\ln(1+a))}{\partial a^2} = -\frac{1}{(1+a)^2}$$

$$\frac{\partial^3(\ln(1+a))}{\partial a^3} = \frac{2}{(1+a)^3}$$

Taylorentwicklung um $a = 0$:

$$\begin{aligned}\ln(1+a) &= 0 + \frac{1}{1+a}\frac{1}{1!}\cdot a + \left(-\frac{1}{(1+a)^2}\right)\cdot\frac{1}{2!}a^2 + \frac{2}{(1+a)^3}\cdot\frac{1}{3!}a^3 - \dots \\ &= a - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a^3\end{aligned}$$

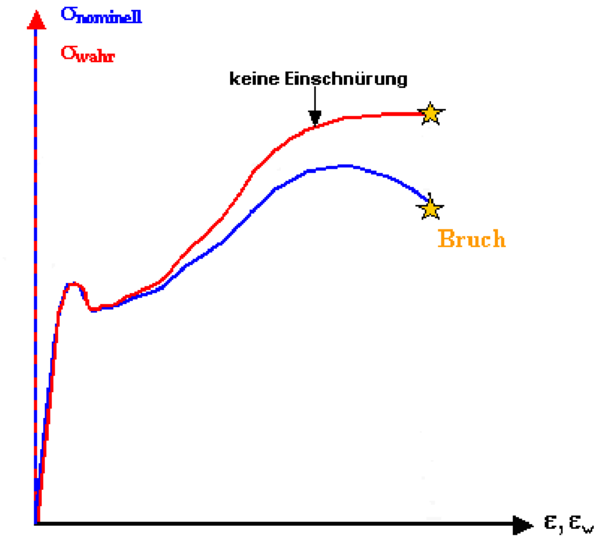
außerdem: $\qquad \epsilon = \frac{l-l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$

$$\Rightarrow \epsilon_w = \ln\left(1+\frac{\Delta l}{l_0}\right) \approx \frac{\Delta l}{l_0} - \frac{(\Delta l)^2}{2l_0^2} + \frac{(\Delta l)^3}{3l_0^3} - \dots$$

und da wir die Terme höherer Ordnung (ab $(\dots)^2$) vernachlässigen, folgt:

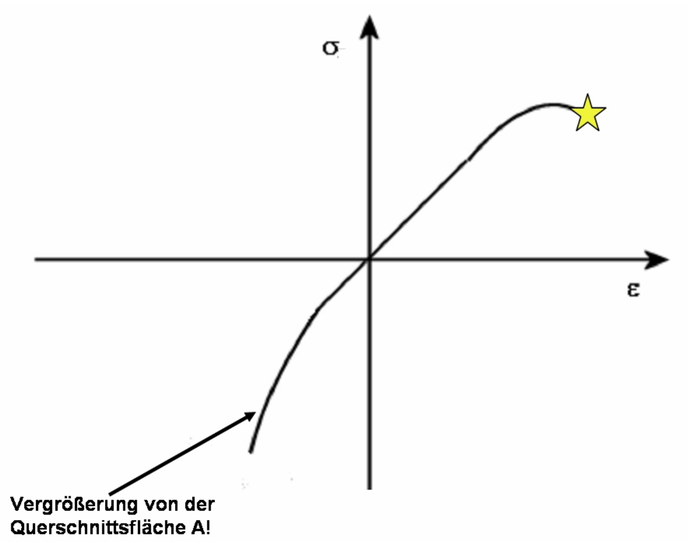
$$\epsilon_w \approx \epsilon$$

c) Spannungs-Dehnungskurve

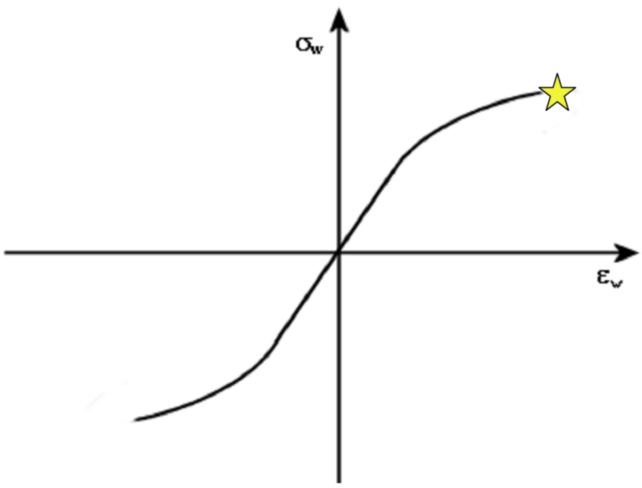


Beachten!!!: Die Bruchdehnung ist bei ϵ_ω kleiner als bei ϵ.

d) Spannungs-Dehnungsdiagramm

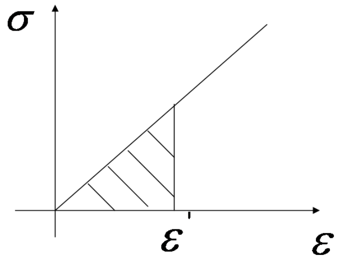


bzw. für die wahre Spannung und wahre Dehnung



gelbes Sternchen: Bruch!
Beim Druck gibt es keinen Bruch!

Aufgabe 41: Fläche unter der Spannungs- und Dehnungskurve
a) Flächenberechnung



$\sigma = E \cdot \epsilon$

$$\int_0^{\epsilon'} \sigma \, d\epsilon = \int_0^{\epsilon'} E\epsilon \, d\epsilon = \frac{1}{2} E\epsilon'^2$$

b) physikalische Bedeutung

$$\left[\frac{J}{m^3}\right] = \left[\frac{N}{m^2}\right] = \left[\frac{Nm}{m^3}\right]$$

Dieses Integral beschreibt die Energie, die elastisch im Material, normiert auf das Volumen, gespeichert ist.

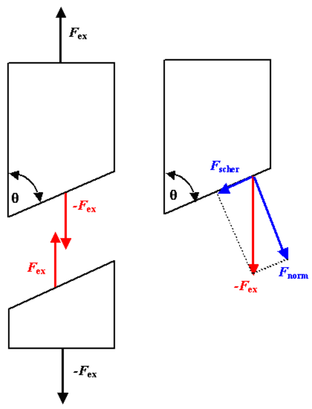
c) Entspannung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} E\epsilon^2 \cdot V &= W \\ \Rightarrow W &= \frac{1}{2} \cdot 123 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2} \cdot (1,5 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 250 \cdot 10^{-6} m^3 \\ &\approx 0,346 \ J \end{aligned}$$

Aufgabe 42: Querkontraktionszahl
Definition:

$$\begin{aligned} K &= \frac{pV_0}{\Delta V} = -\frac{\sigma V_0}{\Delta V}, \quad \Delta V = 0 \Rightarrow K = \infty \\ K &= \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad K = \infty \Rightarrow \nu = 0,5 \end{aligned}$$

Aufgabe 43: Scherspannung



$$\begin{aligned}
F_N &= F\sin\theta \\
F_{Scher} &= F\cos\theta \\
A &= \frac{A_0}{\sin\theta} \\
\sigma &= \frac{F}{A} \\
\sigma_{Scher} &= \frac{F}{A_0}\cos\theta\sin\theta \\
\text{Es gilt: }\ \sin 2x &= 2\sin x\cos x \\
\Rightarrow \sigma_{Scher} &= \frac{\sigma_0}{2}\sin 2\theta \\
\text{Maximum:} & \\
\frac{d\sigma}{d\theta} &= 0 = \frac{2\sigma_0}{2}\cos 2\theta \\
\cos 90^\circ = 0 &\Rightarrow \theta = 45^\circ
\end{aligned}$$

Wenn an die (100)-Flächen der Zug angelegt wurde, liegt $\sigma_{s,max}$ an einer (110)-Fläche.