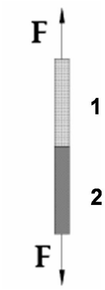
Lösungen zu Blatt 10

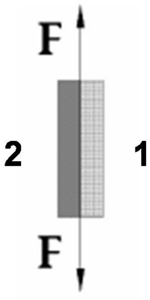
Aufgabe 35: Elastizitiätsmodul

a) Fall I): Stäbe in Reihe



$$\sigma = \text{const.}$$
$$\varepsilon_{ges} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$
$$\frac{\sigma}{E_{ges}} = \frac{\sigma_1}{E_1} + \frac{\sigma_2}{E_2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{E_{ges}} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}$$

b) Fall II): Stäbe parallel:



$$\varepsilon = \text{const.}$$
$$\sigma_{ges} = \varepsilon E_1 + \varepsilon E_2$$
$$\varepsilon E_{ges} = \varepsilon E_1 + \varepsilon E_2 \quad \Longrightarrow \quad E_{ges} = E_1 + E_2$$

c) maximaler / minimaler E-Modul

Zunï¿½chst beschäftigen wir uns mit E_{max}:

ii) Formel für E_{max}: $F||$ Faser

Spannung in Faser:	$\sigma_F = E_F \varepsilon$
Spannung in Matrix:	$\sigma_M = E_M \varepsilon$
Kraft fï¿½r Dehnung:	$F = \sigma_F A_F + \sigma_M (A - A_F)$

effektive Spannung:

$$\begin{aligned} \sigma_{VB} = \frac{F}{A} &= \sigma_F \frac{A_F}{A} + \sigma_M (1 - \frac{A_F}{A}) \\ &= \sigma_F V_F + \sigma_M (1 - V_F) \end{aligned}$$

$$\varepsilon E_{VB} = \varepsilon E_F V_F + \varepsilon E_M (1 - V_F)$$

$$E_{VB} = E_F V_F + E_M (1 - V_F)$$

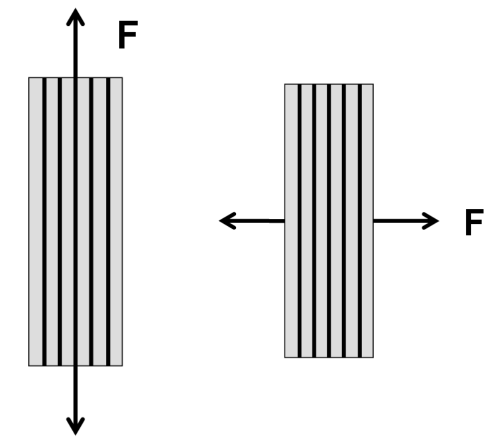
i) Formel für E_{min}: $F \perp$ Faser

$$\sigma_M = \sigma_F = \sigma$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= V_F \varepsilon_F + (1 - V_F)\varepsilon_M \\
&= V_F \frac{\sigma}{E_F} + (1 - V_F)\frac{\sigma}{E_M} \\
\frac{1}{E_M} &= \frac{V_F}{E_F} + \frac{(1 - V_F)}{E_M}
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{E_M} = \frac{E_M V_F + E_F - E_F V_F}{E_F E_M} \quad \Longrightarrow \quad E_{VB} = \frac{E_F E_M}{E_M V_F + E_F - E_F V_F} \right)$$

d) Skizzen



$E_{VB} = E_{max}$ $\quad$ $E_{VB} = E_{min}$

e) Maximale Differenzberechnung:

$$
\begin{aligned}
\Delta E = E^{||} - E^{\perp} \\
&= V_F E_F + (1 - V_F) E_M - \frac{1}{\frac{V_F}{E_F} + \frac{1-V_F}{E_M}} \\
&= V_F E_F + (1 - V_F) E_M - \frac{1}{\frac{E_M V_F + E_F - V_F E_F}{E_F E_M}} \\
&= V_F E_F + E_M - E_M V_F - \frac{E_F E_M}{E_M V_F + E_F - V_F E_F}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}\Delta E}{\mathrm{d}V_F} = E_F - E_M + \frac{E_F E_M (E_M - E_F)}{(E_M V_F + E_F - V_F E_F)^2} = 0 \qquad \text{fi¿}\tfrac{1}{2}\text{r Maximum}
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad & (E_M - E_F)(E_M V_F + E_F - V_F E_F)^2 && = E_F E_M (E_M - E_F) \\
\Leftrightarrow \quad & (E_M V_F + E_F - V_F E_F)(E_M V_F + E_F - V_F E_F) && = E_F E_M \\
\Leftrightarrow \quad & E_M^2 V_F^2 + 2 E_F E_M V_F - E_M E_F V_F^2 + E_F^2 - V_F E_F^2 - E_M E_F V_F^2 - V_F E_F^2 + E_F V_F^2 && = E_F E_M \\
\Leftrightarrow \quad & E_M^2 V_F^2 - 2 E_M E_F V_F^2 + E_F^2 V_F^2 + 2 E_F E_M V_F - 2 E_F^2 V_F + E_F^2 - E_F E_M && = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & V_F^2 (E_M^2 - 2 E_M E_F + E_F^2) + V_F (2 E_F E_M - 2 E_F^2) + E_F^2 - E_F E_M && = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & V_F^2 + V_F \underbrace{\frac{2 E_F E_M - 2 E_F^2}{E_M^2 - 2 E_M E_F + E_F^2}}_{-2{,}5} + \underbrace{\frac{E_F^2 - E_F E_M}{E_M^2 - 2 E_M E_F + E_F^2}}_{1{,}25} && = 0
\end{aligned}
$$

mit $E_F = 100$ GPa
und $E_M = 20$ GPa

$$
V_{F_{1,2}} = -\frac{-2,5}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{2,5}{2}\right)^2 - 1,25}}_{0{,}559} \qquad \Rightarrow V_{F_1} = 0,691 \text{ maximaler Unterschied}
$$

$$
V_{F_2} = 1,809 \;\Leftarrow V > 1 : \text{unphysikalisch!}
$$

Aufgabe 36: Spannungszustände

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 1\ \text{GPa} & 0 & 0 \\ 0 & 1,8\ \text{GPa} & 0,3\ \text{GPa} \\ 0 & 0,3\ \text{GPa} & 1\ \text{GPa} \end{pmatrix} = A$$

Hauptachsentransformation durch $D = UAU^{-1}$. D ist dabei die transformierte Matrix, U die Transformationsmatrix, die zeilenweise aus den (normierten) Eigenvektoren von A aufgebaut ist. (Macht man aber nicht, denn die Eigenwerte bilden schon die HA-Matrix.)

1. Schritt: Berechnung der Eigenwerte:

Charakteristisches Polynom

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1,8-\lambda & 0,3 \\ 0 & 0,3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{entwickeln nach der 1. Zeile}$$

Ein Eigenwert ist: $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{aligned} (1-\lambda)\left[(1,8-\lambda)(1-\lambda) - 0,3^2\right] &= (1-\lambda)\left[1,8 - \lambda - 1,8\lambda + \lambda^2 - 0,09\right] \\ &= (1-\lambda)\left[\lambda^2 - 2,8\lambda + 1,71\right] \\ \lambda_{2,3} &= -\frac{-2,8}{2} \pm \sqrt{(\frac{-2,8}{2})^2 - 1,71} \\ &= 1,4 \pm \underbrace{\sqrt{1,96 - 1,71}}_{0,5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda_2 &= 0,9 \\ \lambda_3 &= 1,9 \end{aligned}$$

Die hauptachsentransformierte Matrix setzt sich aus den Eigenwerten zusammen.

Also:

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \begin{pmatrix} 1,9\ \text{GPa} & 0 & 0 \\ 0 & 1\ \text{GPa} & 0 \\ 0 & 0 & 0,9\ \text{GPa} \end{pmatrix}$$

Dabei ist laut Konvention so geordnet worden, dass $\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \sigma_{33}$ ist.

A C H T U N G: Druckspannungen haben neg. Vorzeichen; Zugspannungen pos. Vorzeichen. Somit stehen Zugspannungen nach der Konvention immer vor Druckspannungen.
Es gilt im Hauptachsensystem:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{1,1\ \text{GPa} - 0,9\ \text{GPa}}{2} = 0,5\ \text{GPa}$$