Lösungen zu Blatt 9

Aufgabe 27: Konzentration

a) Diffusionsgleichung

zu zeigen sind zwei Bedingungen:
i) Die gegebene Gleichung $c(x,t)$ erfüllt die Diffusionsgleichung und
ii) die gegebenen Randbedingungen werden von $c(x,t)$ erfüllt.

zu i)

$$\text{Hinweis I:} \qquad \frac{d}{dz}\int_0^{g(z)} f(y)dy = f(g(z)) \cdot \frac{dg}{dz}(z)$$

$$\text{mit} \qquad g(z) = \frac{x}{2\sqrt{Dt}} \qquad \text{und} \qquad f(y) = \exp\,(-y^2)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -(c_\infty - c_0)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\exp\,(-\frac{x^2}{4Dt}) \cdot \frac{x}{2\sqrt{D}}(-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}})\right)$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} = -(c_\infty - c_0)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\exp\,(-\frac{x^2}{4Dt}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = (c_\infty - c_0)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\exp\,(-\frac{x^2}{4Dt}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{Dt}}\frac{2x}{4Dt}\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} - D\frac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2} &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}}(c_\infty - c_0)\exp\,(-\frac{x^2}{4Dt}) \cdot \left[-\frac{x}{4\sqrt{D}t^{\frac{3}{2}}} - D\frac{-2x}{8D^{\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}}}\right] \\ &= 0 \qquad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

zu ii) Randbedingungen:

$$\text{I:} \qquad c_0 = c(x, t=0)$$

$$\begin{aligned}c(x,t=0) &= (c_\infty - c_0) \cdot \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \exp\,(-y^2)dy\right) + c_o \qquad \text{- mit Hinweis II} \\ &= (c_\infty - c_0) \cdot \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) + c_0 \\ &= c_0 \qquad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

$$\text{II:} \qquad c_\infty = c(x=0, t)$$

$$\begin{aligned}c(x=0,t) &= (c_\infty - c_0) \cdot \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^0 \exp\,(-y^2)dy\right) + c_o \\ &= c_\infty \qquad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

III: $c_\infty = c(x, t=\infty)$

$$c(x,t=\infty) = (c_\infty - c_0)\cdot\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^0 \exp{(-y^2)}dy\right) + c_o$$
$$= c_\infty \qquad \text{q.e.d.}$$

b) Konzentration

$$T \;=\; 1394°C \;\hat{=}\; 1667\ K$$
$$\Rightarrow \frac{1}{T} \approx 6\cdot 10^{-4} \Rightarrow 1000\cdot\frac{1}{T} = 0,6$$
$$\Rightarrow D_{As}(\text{aus Diagramm}) \approx 10^{-12}\frac{cm^2}{s}\cdot 10^{\frac{8}{13}} = 4,12\cdot 10^{-12}\frac{cm^2}{s}$$
$$c(20\mu m, t_w) = \frac{1}{2}c_\infty$$
$$c_0 = 0$$
$$c(x,t) = c_\infty\left(1 - \text{erf}\,(\frac{x}{2\sqrt{Dt}})\right) = \frac{1}{2}c_\infty$$
$$\text{erf}\,(0,5) \approx 0,5$$
$$\Rightarrow c_\infty\ \text{erf}\,(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}) = \frac{1}{2}c_\infty$$
$$\Rightarrow \frac{x}{2\sqrt{Dt}} = 0,5$$
$$\text{mit}\quad x = 20\mu m$$
$$\Rightarrow 20\cdot 10^{-6}m = \sqrt{Dt}$$
$$\Rightarrow t = \frac{(20\cdot 10^{-6}m)^2}{4,12\cdot 10^{-12}\frac{cm^2}{s}}$$
$$\Rightarrow t \approx 971.000\ s \approx 270\ h$$

Aufgabe 28: Diffusionsgleichung

a) Lösung

$$
\begin{aligned}
c(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \exp{(-\frac{x^2}{4Dt})} \\
\frac{\partial c}{\partial t} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \cdot \exp{(-\frac{x^2}{4Dt})} \cdot \left[\frac{x^2}{4Dt^2} - \frac{1}{2t}\right] \\
\frac{\partial c}{\partial x} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \cdot \exp{(-\frac{x^2}{4Dt})} \cdot -\frac{2x}{4Dt} \\
\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \cdot \exp{(-\frac{x^2}{4Dt})} \cdot \left[\frac{x^2}{4D^2t^2} - \frac{1}{2Dt}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} - D\frac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \cdot \exp{(-\frac{x^2}{4Dt})} \cdot \left[\frac{x^2}{4Dt^2} - \frac{1}{2t} - D \cdot \left(\frac{x^2}{4D^2t^2} - \frac{1}{2Dt}\right)\right] \\
&= 0 \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}
$$

b) Delta-Funktion
zu zeigen:

$$
\begin{aligned}
&1) \int_{-\infty}^{+\infty} c(x, t \to 0) dx = 1 \\
&2) \; c(0, t \to 0) = \infty \\
&3) \; c(x \neq 0, t \to 0) = 0
\end{aligned}
$$

zu 1)

$$\lim_{t \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \exp{(-\frac{x^2}{4Dt})} dx$$

Substitution $\qquad y^2 = \dfrac{x^2}{4Dt} \Rightarrow y = \dfrac{x}{2\sqrt{Dt}}$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{Dt}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{Dt} dy$$

$$\lim_{t \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \exp{(-y^2)} 2\sqrt{Dt} dy$$

Symmetrie des Integrals um 0 : $\quad f(x) = f(-x)$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2 \cdot \int_{0}^{+\infty} \exp{(-y^2)} dy \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
&= 1 \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}
$$

zu 2)

$$c(0, t \to 0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \cdot \exp{(0)}$$
$$= \infty \qquad \text{q.e.d.}$$

zu 3)

$$c(x \neq 0, t \to 0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \cdot \exp{(-\frac{x^2}{4Dt})}$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{-\frac{1}{4\sqrt{\pi D} t^{\frac{3}{2}}}}{\exp{(\frac{x^2}{4Dt})} \cdot -\frac{x^2}{4Dt^2}} \qquad \text{folgt aus L'Hospital}$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{-\frac{1}{4\sqrt{\pi D} t^{\frac{3}{2}}} \cdot -\frac{4Dt^2}{x^2}}{\exp{(\frac{x^2}{4Dt})}}$$
$$= \frac{0}{\infty}$$
$$= 0 \qquad \text{q.e.d.}$$

Aufgabe 29: Diffusionskoeffizienten

Abschätzung: $D = a^2 \cdot r$

$$T = \tfrac{1}{r} = \tfrac{a^2}{D}$$

nun ist: $a_{Si} = 0,543nm = 0,543 \cdot 10^{-9}m$

aus Diagramm: $1000\frac{1}{T} \approx 0,68 \Rightarrow D_{Si,1473K} \approx 4,12 \cdot 10^{-14} \frac{cm^2}{s}$

Raumtemperatur: $1000\frac{1}{T} \approx 3,33$ ausrechnen $D = D_0 \exp{(-\frac{E}{k_B T})}$

$$\log_{10} D = \log_{10} D_0 - \tfrac{E}{k_B T} \log_{10} e$$

$\Rightarrow$ $E = -\frac{k}{\log_{10} e} \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx 6,11 \cdot 10^{-19} J$

$\Rightarrow$ $D_0 \approx 4,6 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s^2}$

$\Rightarrow$ $D_{Si,300K} = D_0 \cdot \exp{(-\frac{E}{k_B T})} \approx 1,47 \cdot 10^{-69} \frac{m^2}{s}$

$$T_{1473K} \approx 72ms$$
$$T_{300K} \approx 6,36 \cdot 10^{42} a$$

geschätztes Alter des Universums: $\approx 1,4 \cdot 10^{10} a$