Lösungen zu Blatt 2

Aufgabe 5:
5 a):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0$$

5 b):

$$\psi_1(x) = A\ e^{ikx} + B\ e^{-ikx}$$
$$\psi_1^{'}(x) = ikAe^{ikx} - ikBe^{-ikx}$$
$$\psi_1^{''}(x) = -k^2 Ae^{ikx} - k^2 Be^{-ikx}$$

$$-k^2 Ae^{ikx} - k^2 Be^{-ikx} + \frac{2m}{\hbar^2} EAe^{ikx} + \frac{2m}{\hbar} EBe^{-ikx} = 0$$

$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ ist die Wellenzahl.
Damit ist der Impuls verknüpft: $p = \hbar k$.

5 c):

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_o)\psi = \Delta\psi - \frac{2m}{\hbar^2}(V_o - E)\psi \quad = 0 \tag{1}$$

5 d):

$$\psi_2(x) = Ce^{-\alpha x}$$
$$\psi_2^{'}(x) = -\alpha Ce^{-\alpha x}$$
$$\psi_2^{''}(x) = \alpha^2 Ce^{-\alpha x}$$

Einsetzen in (1):

$$\alpha^2 Ce^{-\alpha x} - \frac{2m}{\hbar^2}(V_o - E)Ce^{-\alpha x} = 0$$

mit $\alpha^2 = \frac{2m(V_o - E)}{\hbar^2}$ - offensichtlich richtig!

5 e):

Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$|\psi_2|^2 = \psi_2 \psi_2^* = |C|^2 e^{-2\alpha x}$$

Wahrscheinlichkeit:

$$W = \int_0^\infty |C|^2 e^{-2\alpha x} \mathrm{d}x = -\frac{|C|^2}{2\alpha} e^{-2\alpha x}\Big|_0^\infty = 0 - \left(-\frac{|C|^2}{2\alpha}\right) = \frac{|C|^2}{2\alpha}$$

Im Gegensatz zu klassischen Teilchen, bei denen gilt:
Wahrscheinlichkeit = 0.

5 f):
Wahrscheinlichkeit divergiert für $x \to \infty$, wenn

$$\psi_2 = C' e^{+\alpha x}$$

5 g):

$$W = \frac{|C|^2 \hbar}{2\sqrt{2m(V_o - E)}} \quad \to \quad 0 \quad \text{für} \quad V_o \quad \to \quad \infty \quad \text{oder} \quad m \quad \to \quad \infty.$$

6 a):
$R = 13,6$ eV
In Formelsammlungen findet man als Ryberg Konstante manchmal auch $R_\infty = 1.0973731 \times 10^7 m^{-1}$, wobei $R = R_\infty hc$.

$$E_n = -\frac{R}{n^2} \tag{2}$$

$\Delta E = E_4 - E_2 = R\left(-\frac{1}{4^2} + \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{16}R = 2.55\text{eV}$
oder
$E_4 = -0,85\text{eV}$
$E_2 = -3,4\text{eV}$
$\Delta E = 2,55\text{eV} = 4,08 \cdot 10^{-19}\text{J}$

mit: $1\text{eV} = 1,602 \cdot 10^{-19}\text{J}$.

6 b):

$$\begin{aligned} E = h\nu \quad &\Rightarrow \nu = \tfrac{E}{h} \quad = 6,158 \cdot 10^{14}\text{Hz} \\ c = \lambda\nu \quad &\Rightarrow \lambda = \tfrac{c}{\nu} \quad = 4,868 \cdot 10^{-7}\text{m} \end{aligned}$$

Das entspricht $486,8$nm, das ist im grün-blauen Bereich.

6 c):
Hier gilt das Kräftegleichgewicht zwischen der Coulombkraft und der Zentrifugalkraft:

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o r^2} &= \frac{mv^2}{r} \\ &= \frac{n^2\hbar^2}{mr^3}, \text{ da ja der Drehimpuls gequantelt ist:} \quad mvr = n\hbar \quad \Rightarrow \quad v = \frac{n\hbar}{mr}, \\ &\text{wobei } n \text{ die Hauptquantenzahl ist.} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow r_n = \frac{n^2\hbar^2 4\pi\varepsilon_o}{me^2} \quad \text{für} \qquad n = 1 \Rightarrow r_1 = 0,53\mathring{A} \;\; \text{(Bohrscher Radius)}$$
$$n = 4 \Rightarrow r_4 = 8,48\mathring{A}$$

Mit $v = \omega r$

$$\Longrightarrow \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o r^2} = m\omega^2 r$$
$$\omega = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_o r^3 m}} = 6,446 \cdot 10^{14}\frac{1}{s}$$

$$N = \frac{2\pi}{T}\frac{\tau}{2\pi} = \omega\frac{\tau}{2\pi} = 6,446 \cdot 10^{14}\frac{1}{s}(10^{-8})s/2\pi = 1,02 \cdot 10^6$$

7 a):

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar \quad \text{oder} \quad \Delta t \Delta E \geq \hbar$$

Experiment: z.B.: Teilchen im Potentialtopf $\Rightarrow$ Nullpunktsenergie

7 b):

$$\Delta x \geq \frac{h}{\Delta p} = \frac{h}{m\Delta v} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}\text{Js}}{0,05\text{kg} \cdot 10^{-4}\frac{m}{s}} = 1,33 \cdot 10^{-28}\text{m},$$

wenn man hier die Masse eines Tennisballs von ungefähr 50g annimmt. Ob man nun $\hbar$ oder nur h in die Formel einsetzt, ist relativ egal, der Faktor, der sich durch 2π ergibt, ändert das Ergebnis nur unwesentlich.
$\Rightarrow$ Ortsunschärfe ist vernachlässigbar!

7 c):

$$\begin{aligned}
m_{Proton} &= 1,6726 \cdot 10^{-27}\text{kg} \\
\Delta v &= 10^{-4}\frac{\text{m}}{\text{s}} \\
\Delta x &= \frac{h}{m\Delta v} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}\text{Js}}{1,6726 \cdot 10^{-27}\text{Kg} \cdot 10^{-4}\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 3,96 \cdot 10^{-3}\text{m}
\end{aligned}$$

$r_e = 2,818 \cdot 10^{-15}$m, das weiß man oder schlägt man nach, z.B.: im Skript, durchschnittlicher Durchmesser eines Elektrons $= 5,64 \cdot 10^{-15}$m.

Δx ist noch mal $1,41 \cdot 10^{12}$ mal größer!