Lösungen zu Blatt 1

Aufgabe 1: Kurvendiskussion
1 a):

$$y = -\frac{A}{x^6} + \frac{B}{x^{12}} = -Ax^{-6} + Bx^{-12}$$
$$y^{'} = 6Ax^{-7} - 12Bx^{-13}$$
$$y^{''} = -42Ax^{-8} + 156Bx^{-14}$$

Notwendige und hinreichende Bedingung für Extrema ist: $y^{'} = 0 \wedge y^{''} \neq 0$.

$$y^{'} = 0 \quad \Rightarrow \quad 6Ax^{-7} = 12Bx^{-13}$$
$$Ax^{-7} = 2Bx^{-13}$$
$$\frac{A}{2B} = \frac{x^7}{x^{13}} = \frac{1}{x^6}$$
$$\Rightarrow x = \sqrt[6]{\frac{2B}{A}} \quad \vee \quad x = -\sqrt[6]{\frac{2B}{A}} \tag{1}$$

Zur Untersuchung der Extrema, ob es Maxima oder Minima sind, benötigen wir die 2te Ableitung:

$$y^{''} = -42A\left[\sqrt[6]{\frac{2B}{A}}\right]^{-8} + 156B\left[\sqrt[6]{\frac{2B}{A}}\right]^{-14}$$
$$= -42A\left(\frac{2B}{A}\right)^{-\frac{4}{3}} + 156B\left(\frac{2B}{A}\right)^{-\frac{7}{3}}$$
$$= \left(\frac{2B}{A}\right)^{-\frac{4}{3}}\left[-42A + 156B\left(\frac{A}{2B}\right)\right] = 36A\left(\frac{2B}{A}\right)^{-\frac{4}{3}}$$

Es gilt $36A\left(\frac{2B}{A}\right)^{-\frac{4}{3}} > 0$ für $A, B > 0$

$$\Rightarrow y^{''} \quad Minimum \tag{2}$$

1 b):
Die notwendige Bedingung für den Wendepunkt ist $y^{''} = 0$

$$156Bx^{-14} = 42Ax^{-8}$$
$$\frac{156}{42}\frac{B}{A} = \frac{x^{14}}{x^8} = x^6$$
$$\Rightarrow x = \sqrt[6]{\frac{78}{21}\frac{B}{A}} = \sqrt[6]{\frac{26}{7}\frac{B}{A}} \quad \vee \quad x = -\sqrt[6]{\frac{26}{7}\frac{B}{A}}$$

1 c):

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{A}{x^6}+\frac{B}{x^{12}}\right) &= 0 \\ \lim_{x\to 0}\left(-\frac{A}{x^6}+\frac{B}{x^{12}}\right) &= \infty \end{aligned} \tag{3}$$

1 d):

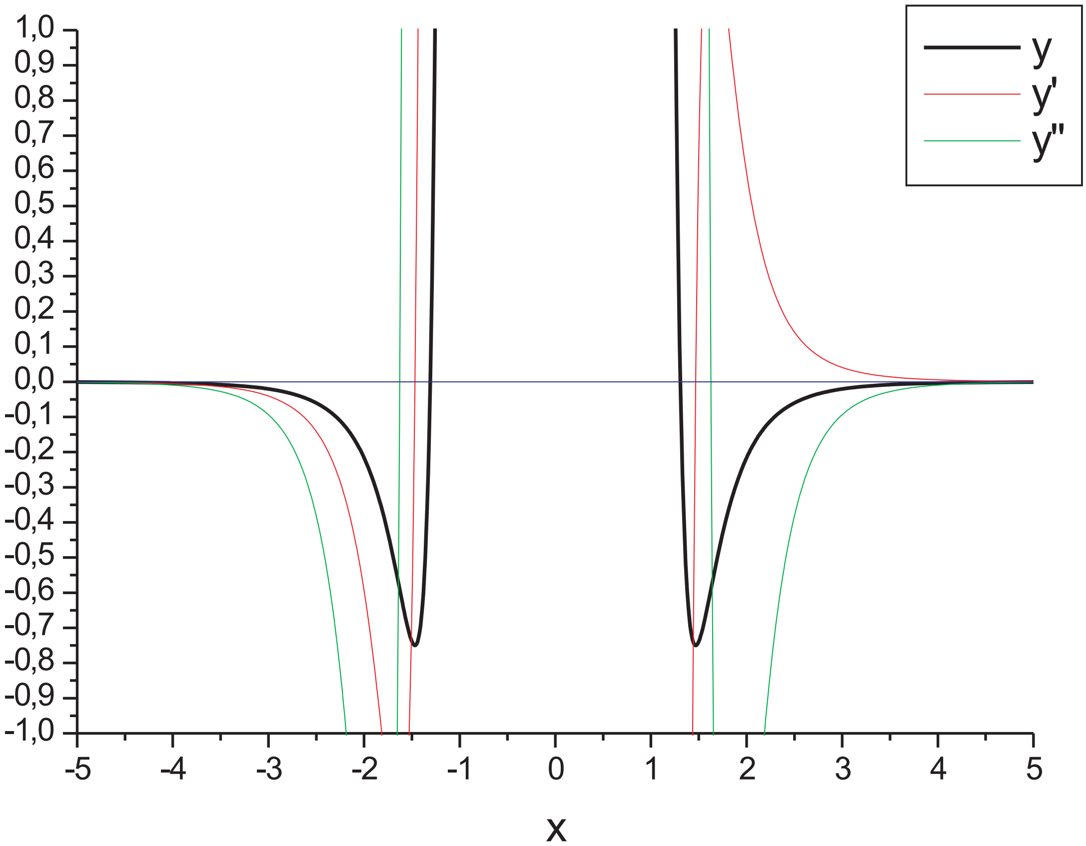

Abbildung 1: Lennard Jones Potential mit A=15 und B=75

2):

$$A = \int_0^\infty \frac{1}{ae^{bx} - 1} dx = \int_0^\infty \frac{e^{-bx}}{a - e^{-bx}} dx$$

Dann kann man $t = e^{-bx}$ substituieren; die Integration geht dann über dt:

$$\frac{dt}{dx} = -be^{-bx} \Rightarrow dx = \frac{dt}{-be^{-bx}} = \frac{dt}{-bt}$$

Außerdem verschieben sich noch die Grenzen:

$$e^{-b\infty} = 0$$
$$e^{-b0} = 1$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^0 \frac{t}{a-t} \frac{1}{-bt} dt = \frac{1}{b} \int_1^0 \frac{t}{t(t-a)} dt = \frac{1}{b} \int_1^0 \frac{1}{t-a} dt \\ &= \left[\frac{1}{b} ln(t-a)\right]_1^0 = \frac{1}{b} \left[ln(0-a) - ln(1-a)\right] \\ &= \frac{1}{b} ln(\frac{-a}{1-a}) \quad = \frac{1}{b} ln(\frac{a}{a-1}) \end{aligned}$$

3 a):

$$f(x) = y = ae^{bx}$$

Mit logarithmischer Auftragung ergibt sich:

$$\ln(y) = \ln(ae^{bx}) = \ln(a) + \ln(e^{bx}) = \ln(a) + bx \tag{4}$$

Also trägt man $\ln(f(x))$ gegen x auf und erhält eine Gerade.

3 b):
Die Konstante a erhält man aus dem Schnittpunkt mit der $\ln(y)$-Achse ($x = 0$), da

$$\ln(y) = \ln(a) + b \cdot 0 = \ln(a) \quad \Leftrightarrow \quad y = a \tag{5}$$

Die Konstante b ist die Steigung der Geraden.

3 c):
Es gilt:

$$\begin{aligned} x &= n^{log_n x} \\ \Rightarrow \ln(x) &= \ln\left(n^{\log_n x}\right) = \log_n(x) \ln(n) \\ \Rightarrow \log_n(x) &= \frac{ln(x)}{\ln(n)} \end{aligned}$$

Dann folgt weiter für die Funktion:

$$\log_n(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(n)} = \frac{\ln(a)}{\ln(n)} + \frac{b}{\ln(n)}x$$
$$\Rightarrow \log_n(y) = \log_n(a) + \frac{b}{\ln(n)}x$$

Die Konstante a bestimmt sich wieder aus dem Schnittpunkt mit der $\log_n(y)$-Achse und b aus der Steigung $\frac{b}{\ln(n)}$.

3 d):

$$y = ax^b$$
$$\ln(y) = \ln(a) + \ln(x^b) = \ln(a) + b \cdot \ln(x) \tag{6}$$

Mit einer doppellogarithmischer Auftragung ($\ln(y)$ gegen $\ln(x)$) ergibt sich auch hier eine Gerade, mit der man die Konstanten a und b wieder über den Achsenabschnitt und die Steigung erhält.

4 a):
Allgemein sind die Eigenwerte λ_i einer Matrix A gegen durch $\det(A - \lambda E) = 0$.
Mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 1-2\sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ folgt dann:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 1-\lambda-2\sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\left[(1-\lambda-2\sqrt{2})(1-\lambda) - 3\right] + \sqrt{3}\left[-\sqrt{3}(1-\lambda)\right] \\
&= (1-\lambda)\left[1-\lambda-2\sqrt{2}-\lambda-\lambda^2+2\sqrt{2}\lambda-3\right] + \sqrt{3}\left(-\sqrt{3}+\sqrt{3}\lambda\right) \\
&= (1-\lambda)\left[-2-2\sqrt{2}-2\lambda+2\sqrt{2}\lambda+\lambda^2\right] - 3 + 3\lambda \\
&= -2-2\sqrt{2}-2\lambda+2\sqrt{2}\lambda+\lambda^2+2\lambda+2\sqrt{2}\lambda+2\lambda^2-2\sqrt{2}\lambda^2-\lambda^3-3-3\lambda \\
&= -5-2\sqrt{2}+4\sqrt{2}\lambda+3\lambda+3\lambda^2-2\sqrt{2}\lambda^2-\lambda^3 \\
&= -\lambda^3+(3-2\sqrt{2})\lambda^2+(3+4\sqrt{2})\lambda-5-2\sqrt{2} \qquad \text{(Charakteristisches Polynom)}
\end{aligned}$$

Die erste Nullstelle ist

$$\lambda_1 = 1, \tag{7}$$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{rrrrl}
[-\lambda^3 & +(3-2\sqrt{2})\lambda^2 & +(3+4\sqrt{2})\lambda & -5-2\sqrt{2}] & /(\lambda-1) = -\lambda^2+(2-2\sqrt{2})\lambda+(5+2\sqrt{2}) \\
-(-\lambda^3 & +\lambda^2) & & & \\
 & (2-2\sqrt{2})\lambda^2 & & & \\
 & -((2-2\sqrt{2})\lambda^2 & -(2-2\sqrt{2})\lambda) & & \\
 & & (5+2\sqrt{2})\lambda & -5-2\sqrt{2} & \\
 & & -((5+2\sqrt{2})\lambda & -(5+2\sqrt{2})) & \\
 & & & 0 &
\end{array}$$

Man kann also auch schreiben:

$$\det(A-\lambda E) = (\lambda-1)\left(-\lambda^2+(2-2\sqrt{2})\lambda+(5+2\sqrt{2})\right)$$

Die zweite Klammer ist eine quadratische Gleichung:

$$ax^2+bx+c=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}$$

Das bedeutet für die Gleichung:

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= 1-\sqrt{2} \pm \left(-\frac{1}{2}\sqrt{12-8\sqrt{2}-(-20-8\sqrt{2})}\right) \\
&= 1-\sqrt{2} \pm \left(-\frac{1}{2}\sqrt{12-8\sqrt{2}+20+8\sqrt{2}}\right) \\
&= 1-\sqrt{2} \pm (-\frac{1}{2}\sqrt{32}) = 1-\sqrt{2} \pm (-2\sqrt{2})
\end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 1\,; \qquad \lambda_2 = 1-3\sqrt{2}\,; \qquad \lambda_3 = 1+\sqrt{2} \tag{8}$$

4 b):
Gesucht sind die Eigenvektoren $\vec{b_i}$ der Gleichung $(A-\lambda_i E)\,\vec{b_i} = 0$:
i) $\lambda_1 = 1$:

$$(A-\lambda_1 E)\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & -2\sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{1,2} \\ b_{1,3} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow b_{1,1} = b_{1,3} \quad \text{und} \quad b_{1,2} = 0$$

$$\text{sei} \quad b_{1,1} = a_1 (= \text{ein konstanter Faktor}) \quad \Rightarrow \quad \vec{b_1} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{normiert:} \quad \frac{\vec{b_1}}{|\vec{b_1}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ii) $\lambda_2 = 1 - 3\sqrt{2}$:

$$(A-\lambda_2 E)b_2 = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{2,1} \\ b_{2,2} \\ b_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2}\sqrt{3} & -3 & 0 \\ -3\sqrt{2}\sqrt{3} & 6 & 3\sqrt{3}\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \vec{b_2} = 0$$

$$= \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{3} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} 3\sqrt{2}b_{2,1} = -3\sqrt{2}a \Rightarrow b_{2,1} = -a_2 \\ b_{2,2} = -\sqrt{6}a_2 \\ \text{2. und 3. Zeile sind äquivalent} \Rightarrow b_{2,3} = a_2 \end{array}$$

$$\vec{b_2} = a_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{normiert:} \quad \frac{\vec{b_2}}{|\vec{b_2}|} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

iii) $\lambda_3 = 1 + \sqrt{2}$:

$$(A-\lambda_3 E)\vec{b_3} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 3\sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \vec{b_3} = 0 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sqrt{3} & -\sqrt{3}\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2}\sqrt{3} & -6 & 3\sqrt{3}\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & -3 & \sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \vec{b_3} \qquad \begin{array}{l} \Rightarrow b_{3,3} = a_3 \\ \Rightarrow \sqrt{2}a_3 = -\sqrt{2}b_{3,1} \Rightarrow b_{3,1} = -a_3 \\ \Rightarrow 3b_{3,2} = \sqrt{6}a_3 \Rightarrow b_{3,2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a_3 \end{array}$$

$$\vec{b_3} = a_3 \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{-\sqrt{6}}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{normiert:} \quad \frac{\vec{b_3}}{|\vec{b_3}|} = \frac{3}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Als Test gilt jeweils: $A\vec{b_i} = \vec{b_i}\lambda_i$

4 c):
Zwei Vektoren $\vec{b_i}, \vec{b_j}$ sind orthogonal, wenn gilt: $\vec{b_i} \cdot \vec{b_j} = 0$.

$$\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{b_1}\vec{b_2} &= -1+0+1 = 0 && \Rightarrow && \vec{b_1} \perp \vec{b_2} \\ \vec{b_1}\vec{b_3} &= 0 && \Rightarrow && \vec{b_1} \perp \vec{b_3} \\ \vec{b_2}\vec{b_3} &= +1 - \frac{\sqrt{6}\sqrt{6}}{3} + 1 = 0 && \Rightarrow && \vec{b_2} \perp \vec{b_3} \end{aligned}$$

Außerdem: $\vec{b_i}\vec{b_i} = 1$, d.h. $\vec{b_i}\vec{b_j} = \delta_{ij}, i, j = 1, 2, 3, ...$

Nun ist es wichtig, die <u>normierten</u> Eigenvektoren zu beachten!

$$\frac{\vec{b_1}}{|\vec{b_1}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}: \qquad \vec{b_1}\vec{b_1} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}(1+0+1) = 1 \qquad \checkmark$$

$$\frac{\vec{b_2}}{|\vec{b_2}|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix}: \qquad \vec{b_2}\vec{b_2} = \frac{1}{8}(1+6+1) = 1 \qquad \checkmark$$

$$\frac{\vec{b_3}}{|\vec{b_3}|} = \frac{3}{2\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}: \qquad \vec{b_3}\vec{b_3} = \frac{3}{24}(1+\frac{6}{9}+1) = 1 \qquad \checkmark$$

4 d):
Die Transformationsmatrix lautet:

$$U = \begin{pmatrix} \vec{b_1} \\ \vec{b_2} \\ \vec{b_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{2\sqrt{6}} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

4 e):

$$U^{-1} = U^T \Rightarrow UU^T = E$$

$$UU^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{2\sqrt{6}} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{3}{2\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{2\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Exemplarisch wird hier ein Element ausgerechnet:
Element 2,3:
d.h. zweite Zeile mal dritter Spalte:

$$\frac{3}{4\sqrt{12}} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4\sqrt{12}} = \frac{6}{4\sqrt{12}} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{6\sqrt{3}\sqrt{12}}{4\sqrt{12}} = \frac{6 - 2\sqrt{3}\sqrt{3}}{4\sqrt{12}} = 0$$

4 f):

$$D = UAU^{-1} = \begin{pmatrix} \vec{b_1} \\ \vec{b_2} \\ \vec{b_3} \end{pmatrix} A \, (\vec{b_1}\vec{b_2}\vec{b_3}) = \begin{pmatrix} \vec{b_1}A \\ \vec{b_2}A \\ \vec{b_3}A \end{pmatrix} (\vec{b_1}\vec{b_2}\vec{b_3})$$

Es gilt: $A\vec{b_i} = \vec{b_i}\lambda$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda\vec{b_1} \\ \lambda\vec{b_2} \\ \lambda\vec{b_3} \end{pmatrix} (\vec{b_1}\vec{b_2}\vec{b_3}) \stackrel{1}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = D$$

1 : $\vec{b_i}\vec{b_j} = \delta_{ij}$ oder auch $UU^T = E$