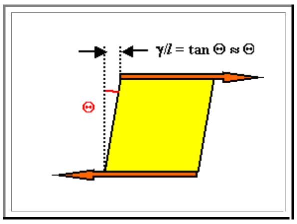
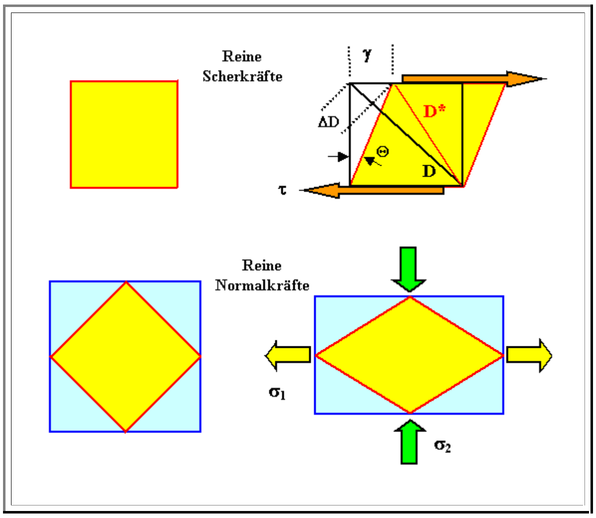
Advanced

Beziehung zwischen E-Modul und Schermodul

- Wie kann man die durch reine Scherspannung erzeugte Verformung durch reine Normalspannungen erhalten? Falls wir einen Weg finden, bekommen wir automatisch eine Beziehung zwischen Schermodul ***G*** und Elastizitätsmodul ***E***.



- Die Ausgangslage ist links gezeigt. Die reine Scherspannung verformt ein Quadrat in ein Raute.
- Wir können exakt die gleiche Verformung auch anders erhalten. Dazu betten wir *gedanklich* unser Quadrat (oder dreidimensional unseren Würfel) in ein identisches Material ein wie unten gezeigt.



- Oben die Verformung mit reinen Scherkräften, unten exakt die gleiche Verformung mit reinen Normalkräften - nach Drehung um **45^{o}** und "Einbettung".
  - Das klappt offenbar - wir erhalten dieselbe Verformung. Nun wollen wir damit den Schermodul berechnen.
- Der Schermodul war definiert als ***G* = τ/**Θ.
  - Wir können das auch über die Änderung der Diagonalen $\Delta D = D - D^*$ ausdrücken, da $\gamma^2 = 2\Delta D^2$, gilt $\gamma = 2^{1/2} \cdot \Delta D$.
  - Damit kann man Θ wie folgt ausdrücken:

$$\Theta = \frac{\gamma}{l} = \frac{2^{1/2} \cdot 2^{1/2} \cdot \Delta D}{D} = \frac{2 \cdot \Delta D}{D}$$

  - *l* ist die Länge des inneren Würfels; für kleine Winkel (die wir hier immer voraussetzen) gilt $l \approx 2^{1/2} D$.
- Was bekommen wir mit den Normalspannungen σ?
  - Die erste Verformung mit nur σ_1 gibt eine Längenänderung der Diagonalen (Querkontraktion bei der zweiten Diagonalen beachten)

$$\frac{\Delta^{(1)}D_1}{D_1} = \epsilon^{(1)}{}_1 = \frac{\sigma_1}{E}$$

$$\frac{\Delta^{(1)}D_2}{D_2} = \epsilon^{(1)}{}_2 = -\nu \cdot \epsilon^{(1)}{}_1 = -\nu \cdot \frac{\sigma_1}{E}$$

Wird jetzt die zweite Verformung mit σ_2 überlagert, erhalten wir den zweiten Satz and Dehnungen.

$$\frac{\Delta^{(2)}D_2}{D_2} = \epsilon^{(2)}{}_2 = \frac{\sigma_2}{E}$$

$$\frac{\Delta^{(2)}D_1}{D_1} = -\nu \cdot \epsilon^{(2)}{}_2 = +\nu \cdot \frac{\sigma_2}{E}$$

Solange die Dehnungen klein sind, dürfen wir sie linear überlagern, und erhalten

$$\frac{\Delta D_1}{D_1} = \frac{\Delta^{(1)}D_1 + \Delta^{(2)}D_1}{D_1} = \frac{\sigma_1 + \nu \cdot \sigma_2}{E}$$

$$\frac{\Delta D_2}{D_2} = \frac{\Delta^{(1)}D_2 + \Delta^{(2)}D_2}{D_2} = -\frac{\sigma_2 + \nu \cdot \sigma_1}{E}$$

Da die beiden Diagonalen entgegengesetzt gleichgroße Längenänderungen erfahren müssen, erhalten wir als erstes Resultat $|\sigma_1| = |\sigma_2|$.

- Die Scher*kräfte* auf die Flächen des gelben Quadrats bzw Würfels sind damit

$$F_T = ½ \cdot 2 \cdot 2^{-½}\sigma \cdot A_{blau} = 2^{-½}\sigma \cdot A_{blau}$$

- da jede der jeweils **2** wirkenden Kräfte eine Komponente $2^{-½}$ in der gelben Ebene hat und dort *zur Hälfte* wirkt; A_{blau} ist die Fläche des blauen Würfels.
- Die Fläche des gelben Würfels ist $A_{gelb} = 2^{-½} \cdot A_{blau}$, damit erhalten wir für die Scherspannungen

$$\tau = \frac{F_t}{A_{gelb}} = \sigma$$

Einsetzen von $\sigma = \tau$ in die $\Delta D/D$ Formel und umschreiben auf Θ ergibt

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{\sigma(1+\nu)}{E} = \frac{\tau(1+\nu)}{E} = \frac{\Theta}{2}$$

Als Endergebnis erhalten wir

$$\tau = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} \cdot \Theta$$

- Das ist die im Skript gegebene Formel, falls wir den Schermodul ***G*** definieren als

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$$

Diese Umrechnung ist natürlich nur eine Art indirekte Hauptachsentransformation. Eine Rotation des Koordinatensystems um **45°** hätte genau die richtige Spannungsverteilung gezeitigt; siehe den entsprechenden Modul.