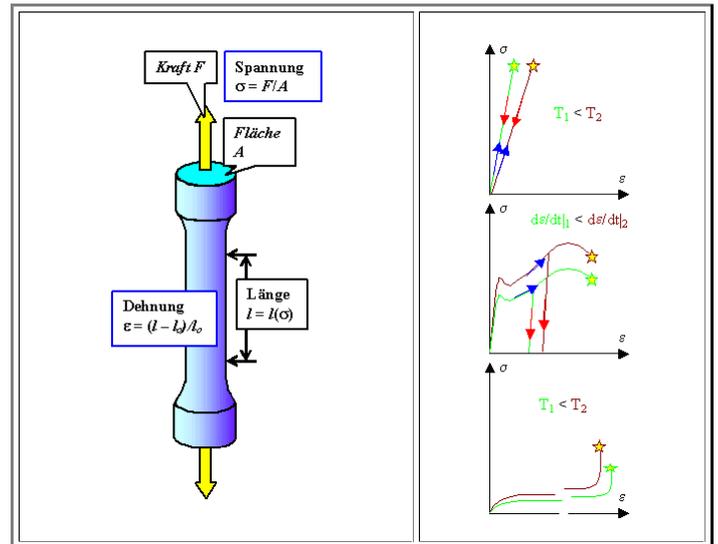
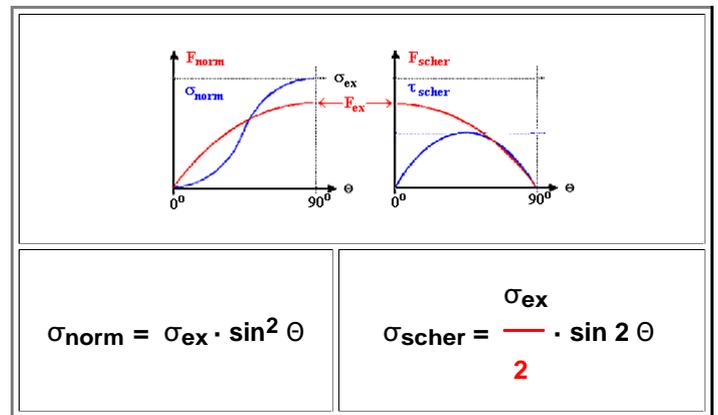


7.4: Zusammenfassung / Merkpunkte zu Kapitel 7: Mechanische Eigenschaften

- Der **Zugversuch** ergibt eine Fülle von Materialeigenschaften:
 - Unterscheidung spröde - duktil - gummiartig usw.; und damit auch elastische - plastische Verformung.
 - Zahlenwerte für **E-Modul** ($E = d\sigma/d\epsilon$); Fließgrenze **R_p**, max. Zugfestigkeit **R_M**, Bruchdehnung und Spannung, Zähigkeit (Fläche unter $\sigma - \epsilon$ Kurve) als Funktion der Temperatur **T** und der Verformungsgeschwindigkeit **dε/dt**.
- Mechanismen dazu indirekt bestimmbar:
 - Elastizität** aus Änderung Bindungsabstände (alle Kristalle, ...). Maximale Dehnung wenige % oder kleiner.
 - Gumimielastizität**: Maximale Dehnung **100 %** und mehr → Reiner Entropieeffekt!
 - Plastische Verformung**: Erzeugung und Bewegung von Versetzungen.



- Auf beliebigen Ebenen im Probekörper steht die wirkende Kraft nicht senkrecht auf der betrachteten Ebene, deshalb:
 - Zerlegung der Spannung in Normalspannungen (σ) und Scherspannungen (τ).
 - Spannungsverläufe (blau) als Funktion des Ebenenwinkels Θ . sind nicht mehr ähnlich dem Kraftverlauf (rot).
 - Scherspannungen bestimmen die plastische Verformung!

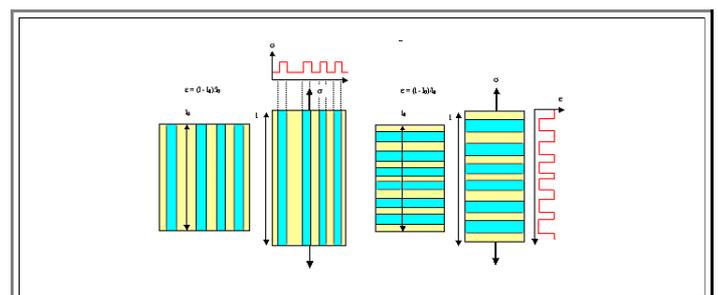


- Spezielle elastische Verformungen werden mit passenden elastischen Modulen beschrieben:
 - Einachsiger Zug (und Druck): **E-Modul** und **Querkontraktionszahl** $\nu \approx 0.2 \dots 0.5$
 - Reine Scherung: **Schermodul G**
 - Allseitiger Druck: **Kompressionsmodul K**
 - Benötigt werden in isotropen homogenen Materialien aber immer nur **2** elastische Module! Ein beliebiger Modul ist immer durch zwei andere darstellbar.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \approx 0,4 E \quad (\text{für } \nu \approx 0,3)$$

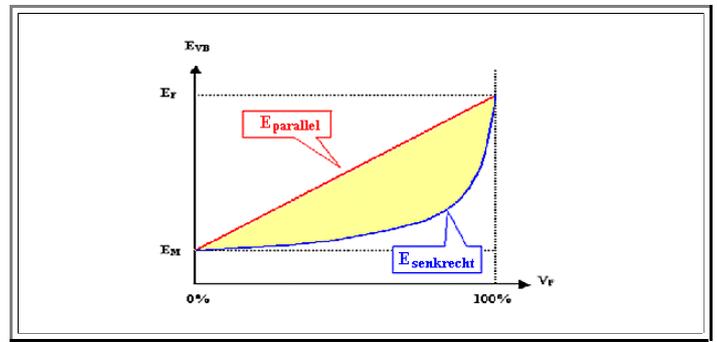
$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \approx 0,8 E \quad (\text{für } \nu \approx 0,3)$$

- Elastisches Verhalten von Verbundwerkstoffen (Typisch: Hartes Material (z.B. Fasern) mit **E_F** in weicher Matrix mit **E_M**) ist leicht eingrenzbar:
 - Extremfälle: "Harte" gleichförmig verteilte Fasern mit Volumenanteil **V_F** senkrecht oder parallel zur Zugrichtung ergibt Extremwerte für den effektiven **E-Modul E_{VB}** des Verbundwerkstoffs: **E_{pa}** und **E_{se}**.



$$E_{pa} = E_F \cdot V_F + E_M \cdot (1 - V_F)$$

$$E_{se} = \frac{1}{\frac{V_F}{E_F} + \frac{1 - V_F}{E_M}}$$



Entspricht Reihen- bzw. Parallelschaltung von Widerständen (oder Kondensatoren, oder Mischung von Dielektrizitätskonstanten, oder ...).

- Analogie ist weitgehend: Elektrische / mech. Spannung (= Ursache) produziert Wirkung = Dehnung / Strom proportional zur Ursache. E bzw. Widerstand R sind Proportionalitätsfaktoren.

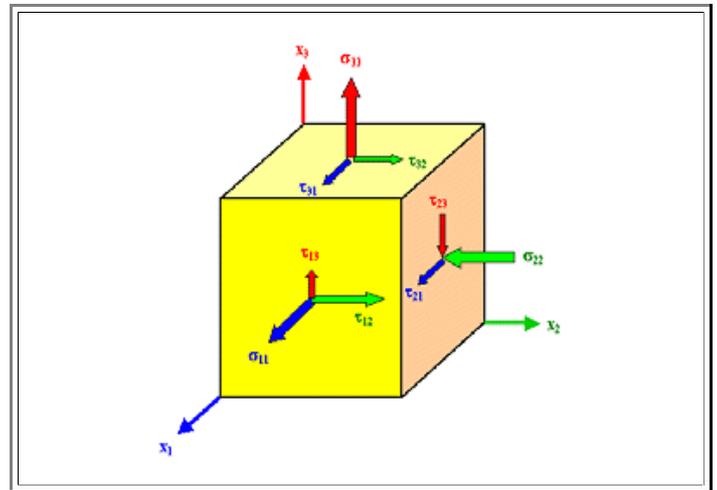
Die beiden Extremfälle im $E_{VB} - V_F$ Diagramm grenzen *alle möglichen Fälle* der Verteilung von hartem Material in weicher Matrix ein!

Ein beliebiger Körper verformt sich elastisch unter dem Einfluß beliebiger Kräfte. Wir *beschreiben* den Vorgang:

- Aus einem kubischen Volumenelement dV am Punkt r wird im allgemeinsten Fall ein "geschertes" Parallelepiped.
- Analogie: Aus einem kubischen Gitter wird ein triklines.

Dazu muß auf jede Fläche des Kubus eine beliebige Spannung wirken können, die wir in eine Normal- und zwei Scherspannungen zerlegen können: \Rightarrow

- Die "Buchhaltung" erfolgt durch zwei Indizes: Der erste gibt die Ebene an ("i" für die Ebene senkrecht zu x_i), der zweite die Richtung ("j" für x_j Richtung).



Anordnung der σ_{ij} und τ_{ij} in Matrixform ergibt einen *Tensor*. \Rightarrow

- Da unser dV - Würfel sich weder bewegen noch drehen soll, sind nur **6** Komponenten unabhängig.

$$\sigma_{ij}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{-i-j}$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$

Tensoren sind Weiterführungen von Vektoren; der Spannungstensor ist ein Tensor **2.** Stufe.

- Skalare = Tensoren **0.** Stufe
- Vektoren = Tensoren **1.** Stufe (**1** Unterstrich)
- Spannungen, Dehnungen = Tensoren **2.** Stufe (**2** Unterstriche)
- (E -Modul = Tensor **4.** Stufe).
- Tensoren **2.** Stufe verknüpfen Vektorfelder, so dass ein lokaler Vektor, z.B. ein lokaler Oberflächennormalenvektor \underline{A} durch Multiplikation mit dem Tensor in einen anderen Vektor transformiert wird; im Beispiel in die auf die Oberfläche wirkende Kraft \underline{F} . \Rightarrow

$$\underline{F} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{A}$$

$$F_x = \sigma_{xx} \cdot A_x + \sigma_{xy} \cdot A_y + \sigma_{xz} \cdot A_z$$

$$F_y = \sigma_{yx} \cdot A_x + \sigma_{yy} \cdot A_y + \sigma_{yz} \cdot A_z$$

$$F_z = \sigma_{zx} \cdot A_x + \sigma_{zy} \cdot A_y + \sigma_{zz} \cdot A_z$$

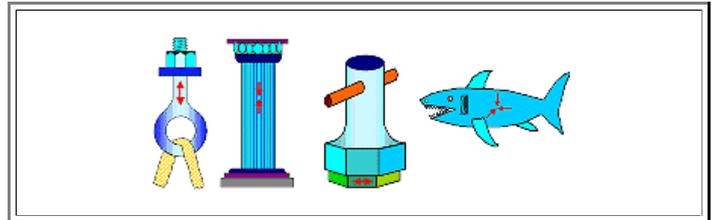
- Der einfachst mögliche Fall einer solchen Verknüpfung ist, dass jede Komponenten des Kraftvektors von jeder Komponente des Oberflächennormalenvektors abhängt:

Die Verknüpfung von Spannungstensor σ_{ij} und dem zugehörigen Dehnungstensor ϵ_{ij} braucht im allgemeinsten Fall jetzt einen Tensor 4. Stufe mit **81** Komponenten; die C_{ijkl} heißen *elastische Koeffizienten*.
 \Rightarrow

Mit Symmetrieüberlegungen lässt sich (für die hier immer unterstellten *Einkristalle*) die Zahl der elastischen Koeffizienten reduzieren:

- Im "schlimmstmöglichen" Fall (*trikline* Symmetrie) werden **21** elastische Koeffizienten gebraucht.
- Im einfachsten Fall (*kubische* Gitter), reichen **2** - daraus lassen sich dann unsere altbekannte elastische Module wie **E**, **v**, **G** oder **K** ableiten.
- Der *einfachste Fall* gilt auch für beliebige *isotrope* *homogene* Materialien, z.B. für alle Polykristalle mit "kleinen" willkürlich orientierten Körnern oder für isotrope amorphe Materialien - und damit für die gebräuchlichsten *technischen Werkstoffe*.
- Speziellen Spannungszuständen entsprechen "einfache" Tensoren. \Rightarrow

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= C_{11 11} \cdot \epsilon_{11} + C_{11 12} \cdot \epsilon_{12} + C_{11 13} \cdot \epsilon_{13} \\ &\quad + C_{11 21} \cdot \epsilon_{21} + C_{11 22} \cdot \epsilon_{22} + C_{11 23} \cdot \epsilon_{23} \\ &\quad + C_{11 31} \cdot \epsilon_{31} + C_{11 32} \cdot \epsilon_{32} + C_{11 33} \cdot \epsilon_{33} \\ \sigma_{12} &= C_{12 11} \cdot \epsilon_{11} + \dots \\ &\quad \dots \end{aligned}$$



Für einen gegebenen Tensor lässt sich durch eine geeignete Koordinatentransformation *immer* ein Koordinatensystem finden, bei dem alle Nichtdiagonalelemente = **0** sind. \Rightarrow

- Dieses **KO**-System heißt *Hauptachsensystem*.
- Tensoren werden, soweit möglich, immer im Hauptachsensystem notiert.
- Die verbliebenen Normalspannungen werden dann nur mit einem Index geschrieben und der Größe nach geordnet.

$$\sigma_{ij}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

Die *maximale Scherspannung* τ_{max} die dann auftreten kann, ist gegeben durch die nebenstehende Formel. \Rightarrow

- Die *Ebenen* mit maximaler Scherspannung liegen unter **45°** zu den Ebenen auf denen σ_1 und σ_3 wirken.

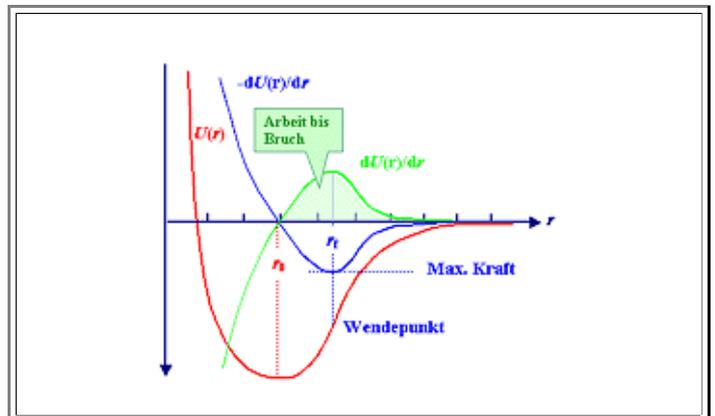
Bedeutung:

- Die maximal möglichen Scherspannungen bestimmen das Auftreten von *plastischer Verformung*
- Die maximale Normalspannung σ_1 bestimmt das Auftreten von *Bruch*.

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Bruch tritt spätestens dann auf, wenn durch elastische Verformung gegen die Bindungskräfte soviel Arbeit geleistet wurde, dass die Bindungsenergie übertroffen wird.

- Nach dem Bruch steckt die zugeführte Energie in der Oberflächenenergie $\gamma \cdot A$ der neugeschaffenen **zwei** Oberflächen **A**.
- Mit diversen Näherungen und Tricks erhält man für die maximale (einachsige Zug)spannung σ_{\max} , die ein Material aushält bevor es bricht, die nebenstehende Beziehung.
- Ein Material ist also umso fester, falls es einen großen **E**-Modul und eine große Oberflächenenergie hat. Außerdem sollte der Bindungsabstand r_0 klein sein.



$$P_{\text{bruch}} = 2\gamma$$

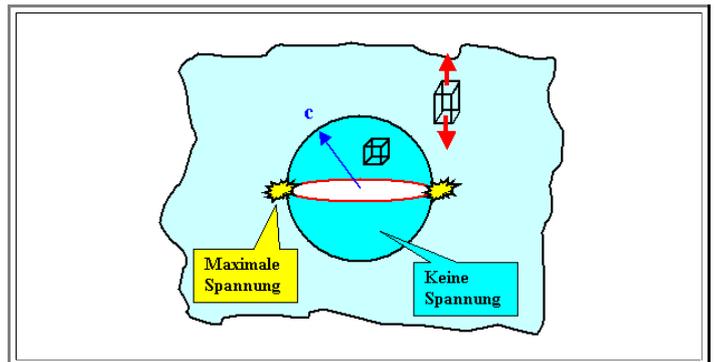
$$\sigma_{\max} \approx \left(\frac{E \cdot \gamma}{r_0} \right)^{1/2}$$

Diese Betrachtung liefert aber nur eine absolute **Höchstgrenze**. In realen **spröden** Materialien tritt Bruch i.d.R. schon bei viel kleineren Spannungen auf.

- In duktilen Materialien erfolgt schon lange vor Erreichen der Bruchspannung plastische Verformung, dadurch werden die Spannungen angebaut und die Bruchspannung kann nicht (sofort) erreicht werden. Falls die Spannung aufrecht erhalten wird, wird Bruch aber früher oder später weit unterhalb der theoretischen Grenze erfolgen.

Auch reale spröde Materialien brechen bei kleineren Spannungen als der theoretischen Grenze, weil sie Defekte enthalten, die "**Mikrorisse**" genannt werden.

- Das Konzept der Mikrorisse ist auf jedes Material anwendbar (nicht nur auf Kristalle); in Kristallen kann ein Mikroriss auch eine Versetzungsaufstauung oder ein Leerstellenagglomerat sein.



Um einen Mikroriss herum sind die lokalen Spannungen anders als im soliden Material, insbesondere an den Enden können sie sehr hoch werden.

- Andererseits werden im Volumen um den Mikroriss herum die Spannungen schwach sein - das Material ist dort ja schon "gerissen".
- Eine Vergrößerung der Mikrorissfläche um die Fläche dA führt demnach einerseits zu Energiegewinn dP_{Riss} , weil um den Riss herum Spannungen, und damit Energie abgebaut wird, andererseits zu einer Energieerhöhung dP_{Ob} durch die neugebildete Oberfläche.

Das Bruchkriterium ist dann einfach Nettoenergiegewinn, d.h.: \Rightarrow

$$\frac{dP_{\text{Ob}}}{dA} < \frac{dP_{\text{Riss}}}{dA}$$

Eine simple Näherung (mit c = lineare Ausdehnung des Risses) ergibt:

- Aufwendigere Rechnungen ändern nur den Faktor **8** etwas.
- Nach wie vor ist die maximale Bruchspannung proportional zur Wurzel aus **E** und γ , aber statt des Bindungsabstandes r_0 geht jetzt die **Mikrorissgröße** ein.

$$\sigma > \left(\frac{8E \cdot \gamma}{\pi \cdot c} \right)^{1/2}$$

▀ Damit können schon kleinste, praktisch nicht nachweisbare Risse im **nm** Bereich die Bruchfestigkeit eines Materials erheblich verkleinern!