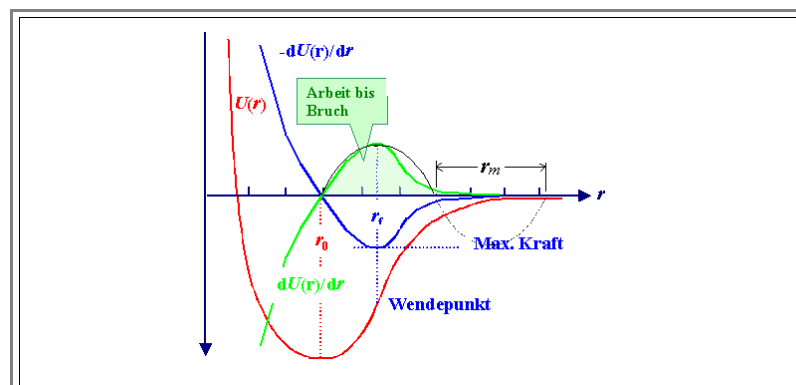


7.3 Der Spröbruch

7.3.1 Theoretische Bruchfestigkeit aus energetischen Betrachtungen

Allgemeine Bemerkungen und theoretische Bruchfestigkeit

- Wie schon [mehrmals betont](#), brechen reale spröde Materialien bei *kleineren* Spannungen als aus [den Bindungskräften ausgerechnet](#).
 - Das ist einerseits unschön, andererseits ein Hinweis darauf, daß das *Gefüge*, also Abweichungen vom idealem (kristallinem) Aufbau, hier mitspielen.
 - Bruchexperimente mit einem gegebenem Material, aber verschiedenem Gefüge, werden in der Regel auch verschiedene Bruchparameter ergeben - wie z.B die Bruchspannung und -Dehnung, oder die [Zähigkeit \$G_C\$](#) .
 - Leider ist der Bruch nicht so "einfach", daß *nur* das Gefüge eines Materials eingetht.
- Das läßt sich am besten dadurch demonstrieren, daß wir einen langen Stab eines spröden Materials mit irgendeinem, aber *homogenem* Gefüge einem Bruchtest unterwerfen.
 - Bei irgendeiner Spannung σ_1 wird das Material in *zwei* Teilstücke zerbrechen. Wir wiederholen den Test jetzt mit den beiden Teilstücken; sie brechen bei der Spannung $\sigma_{2,1}$ und $\sigma_{2,2}$ in *vier* Teilstücke.
 - Und so weiter. Wir erhalten eine ganze Serie von σ_i, j Werten, und wir werden tendenziell immer finden, daß $\sigma_{i, j} > \sigma_{i-1, j}$ - nur der Index *i* ist wichtig.
- In anderen Worten: Je kleiner die Bruchstücke, desto bruchfester sind sie.
 - Das ist ein deutlicher Hinweis darauf, daß der Bruch durch die *Verteilung* von spezifischen Defekten bedingt ist.
 - Eine mögliche Erklärung dafür wäre: Der erste Bruch entsteht am "größten" Defekt mit der größten Leichtigkeit, die weiteren Brüche werden an den zweitgrößten, drittgrößten usw. Defekten induziert - es wird immer schwerer. Das ist im Kern die richtige Interpretation.
- Die einfachste Behandlung der **Bruchmechanik** startet nicht mit Spannungen und Dehnungen, sondern betrachtet *Energien*. Wir vergleichen im wesentlichen die gesamte Energie (oder besser freie Enthalpie) die im gebrochenen Körper steckt mit der Energie im verspannten Zustand.
 - Zunächst betrachten wir jedoch die *theoretische* Bruchfestigkeit indem wir die *Arbeit bis zum Bruch* aus den Bindungspotentialen berechnen.
 - In [Kapitel 2.4.3](#) haben wir bereits die *Spannungen und Dehnungen bis zum Bruch* berechnet. Das [Ergebnis](#) war jedoch unhandlich und nicht geeignet um reale Materialien zu beurteilen.
- Schauen wir uns zunächst noch mal den prinzipiellen Verlauf von Bindungspotential und den zugehörigen Kräften bzw. Spannungen an.



- Die rückstellende Kraft aus dem Bindungspotential $U(r)$ ist $-dU/dr$. Wir müssen Arbeit gegen diese Kraft leisten, d.h. mit der Kraft $+dU/dr$ die Distanz von r_0 bis ∞ überwinden.
 - Die dabei zu leistende Arbeit ist dann genau die hellgrüne Fläche unter der dU/dr Kurve.
- Wir könnten nun natürlich die [allgemeine Potentialformel](#) benutzen und aufintegrieren; das Ergebnis wird aber kaum nützlicher sein können als die [alte Formel](#) für die maximale Bruchspannung. *Wir wählen einen anderen Weg.*

- Zunächst machen wir eine [mathematische Näherung](#) für den relevanten Teil der Kraftkurve - wir ersetzen den genauen Verlauf durch eine Sinus-Halbwellen. Die Amplitude der zu wählenden Sinuskurve ist dann als σ_{\max} zu wählen, die Wellenlänge λ wäre $\lambda = 4(r_f - r_0)$ oder, mit der Größe r_m wie im Bild definiert, $\lambda = 2r_m$. Wir [schreiben also](#) (gleich für σ statt der Kraft F)

$$\sigma = \sigma_{\max} \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (r - r_0) = \sigma_{\max} \cdot \sin \frac{\pi(r - r_0)}{r_m}$$

- Die zu leistende Arbeit bis zum Bruch pro Flächeneinheit (= r^2_0) ist damit in der Sinus-Näherung (mit $r - r_0$ als Variable):

$$P_{\text{bruch}} = \int_{r_0}^{r_0 + r_m} \sigma \cdot dr \approx \sigma_{\max} \cdot \int_{r_0}^{r_0 + r_m} \sin \frac{\pi(r - r_0)}{r_m} d(r - r_0)$$

- Als unmittelbares Ergebnis erhalten wir

$$P_{\text{bruch}} \approx \sigma_{\max} \cdot \frac{2 \cdot r_m}{\pi}$$

- Nett und einfach, aber wir brauchen noch σ_{\max} und r_m als Funktionen *sinnvoller* Materialparameter (die Exponenten n und m aus der [Potentialformel](#) sind z.B *nicht* sinnvoll).

- Dazu überlegen wir uns: *Wo bleibt die geleistete Arbeit?* Sie kann nicht spurlos verschwinden, sondern muß noch im System stecken. Da ein Bruch nicht zur Erwärmung der Probe führt, wird sie nicht (oder nur zu einem vernachlässigbarem Teil) in Gitterschwingungen, d.h. in Wärme umgesetzt.

- Was hat sich also geändert? Antwort: *Wir haben neue Oberfläche geschaffen*. Und jede Oberfläche hat eine [Oberflächenenergie](#) γ . Ein Großteil der geleisteten Brucharbeit wird also benötigt, um diese, im gebrochenen System zusätzlich auftretende Oberflächenenergie zu schaffen.

- Da wir *zwei* neue Oberflächen produzieren setzen wir jetzt einfach

$$P_{\text{bruch}} = 2\gamma$$

- Beide Terme sind Energien pro Flächeneinheit; eingesetzt erhalten wir für r_m

$$r_m = \frac{\pi \cdot \gamma}{\sigma_{\max}}$$

- Damit haben wir r_m ; wir brauchen aber immer noch einen sinnvolles Maß für σ_{\max} ; eine Größe, die aus der Ableitung der Potentialkurve resultiert.

- Dazu erinnern wir uns, daß die [Steigung der Potentialkurve etwas mit dem E-Modul zu tun hatte](#). Wir haben also etwas verkappte zusätzliche Information über den Verlauf unserer Sinus-Näherung, die wir einbringen können.
- Das ist nicht besonders schwierig, aber auch nicht direkt einsichtig. Der vielleicht einfachste Rechenweg führt über die Betrachtung unserer Sinus-Näherung an der Stelle r_0 .
- Um r_0 können wir den Sinus durch sein Argument nähern, d.h.

$$\sin \frac{\pi(r - r_0)}{r_m} \approx \frac{\pi(r - r_0)}{r_m} = \frac{\pi \cdot r_0}{r_m} \cdot \frac{r - r_0}{r_0} = \frac{\pi \cdot r_0}{r_m} \cdot \epsilon$$

- In dieser Näherung erhalten wir für die Spannung σ bei r_0 und daraus dann für σ_{\max}

$$\sigma(r = r_0) \approx \sigma_{\max} \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot (r_0/r_m)$$

$$\sigma_{\max} \approx \frac{\sigma(r = r_0)}{\epsilon} \cdot \frac{r_m}{\pi \cdot r_0}$$

Der erste Term - σ/ϵ - ist aber schlicht der **Elastizitätsmodul E** - damit haben wir das Ziel erreicht. Wir müssen nur noch r_m aus [obiger Formel](#) einsetzen und erhalten

$$\sigma_{\max} \approx \frac{E \cdot \pi \cdot \gamma}{\pi \cdot r_0 \cdot \sigma_{\max}}$$

Das Endergebnis ist damit

$$\sigma_{\max} \approx \left(\frac{E \cdot \gamma}{r_0} \right)^{1/2}$$

Das ist eine brauchbare Formel! In Worten sagt sie:

- Die **maximale** Spannung, die ein Material aushält bevor es bricht, ist proportional zu der Wurzel aus seinem **Elastizitätsmodul** und seiner **Oberflächenenergie**.
- Damit kann man arbeiten; wir erhalten zum Beispiel folgende Werte für einige Materialien

Material	σ_{\max} [GPa]
C (Diamant)	205 {111}
C (Graphit)	1,4 {100}
Si	32 {110}
SiO₂ ("Glas")	16 {amorph}
Angaben sind die kleinsten Werte für die jeweilige krist. Ebene	

- Da die Oberflächenenergie stark anisotrop ist, wird auch σ_{\max} anisotrop sein. Diamanten (und **Si**, und fast alle Einkristalle) kann man auch immer in **einer** Ebenen besonders gut **spalten**, d.h. dort brechen sie am leichtesten.

Was sagt das **Experiment**? Jetzt, wo wir leicht Vorhersagen machen können, lohnt sich die Überprüfung.

- Das Experiment sagt:** Die meisten Materialien brechen bei **viel kleineren Spannungen** als σ_{\max} . Glas, z.B. liegt eher bei ca. **0,1 GPa** als bei den theoretischen **16 GPa**. Außerdem findet man im Experiment oft stark schwankende Werte, auch für nominell identische Proben.
- Woran liegt das? Nun ja, [wie schon erwähnt](#) (und wie fast immer): An **Defekten**, und zwar an einer speziellen Sorte, die wir als **"Mikrorisse"** bezeichnen. Wir sind Mikrorissen [schon mal kurz begegnet](#), haben sie aber nicht ausführlich behandelt.
- Den Zusammenhang zwischen Mikrorissen und der Bruchfestigkeit schauen wir uns im nächsten Kapitel etwas genauer an.