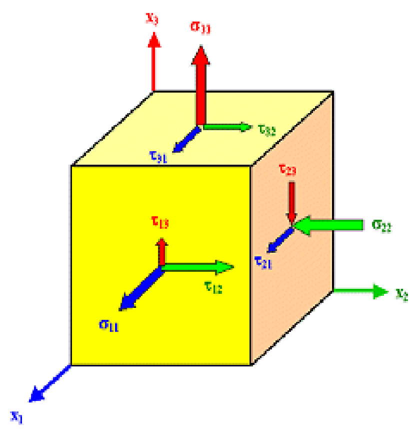
## 7.2.3 Merkpunkte zu Kapitel 7.2: Der allgemeine Spannungszustand

- Ein beliebiger Körper verformt sich elastisch unter dem Einfluß beliebiger Kräfte. Wir *beschreiben* den Vorgang:
  - Aus einem kubischen Volumenelement **d*V*** am Punkt ***r*** wird im allgemeinsten Fall ein "geschertes" Parallelepiped.
  - Analogie: Aus einem kubischen Gitter wird ein triklines.




- Dazu muß auf jede Fläche des Kubus eine beliebige Spannung wirken können, die wir in eine Normal- und zwei Scherspannungen zerlegen können: ⇒
  - Die "Buchhaltung" erfolgt durch zwei Indizes: Der erste gibt die Ebene an ("**i**" für die Ebene senkrecht zu $x_i$), der zweite die Richtung ("**j**" für $x_j$ Richtung).

- Anordnung der $\sigma_{ij}$ und $\tau_{ij}$ in Matrixform ergibt einen *Tensor*. ⇒
  - Da unser **d*V*** - Würfel sich weder bewegen noch drehen soll, sind nur **6** Komponenten unabhängig.

$$\sigma_{ij}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{i\,j} = \sigma_{-i\,-j}$$

$$\tau_{i\,j} = \tau_{j\,i}$$

- Tensoren sind Weiterführungen von Vektoren; der Spannungstensor ist ein Tensor **2.** Stufe.
  - Skalare = Tensoren **0.** Stufe
    Vektoren = Tensoren **1.** Stufe (**1** Unterstrich)
    Spannungen, Dehnungen = Tensoren **2.** Stufe (**2** Unterstriche)
    (***E***-Modul = Tensor **4.** Stufe).
  - Tensoren **2.** Stufe verknüpfen Vektorfelder, so dass ein lokaler Vektor, z.B. ein lokaler Oberflächennormalenvektor $\underline{A}$ durch Multiplikation mit dem Tensor in einen anderen Vektor transformiert wird; im Beispiel in die auf die Oberfläche wirkende Kraft $\underline{F}$. ⇒
  - Der einfachst mögliche Fall einer solchen Verknüpfung ist, dass jede Komponenten des Kraftvektors von jeder Komponente des Oberflächennormalenvektors abhängt:

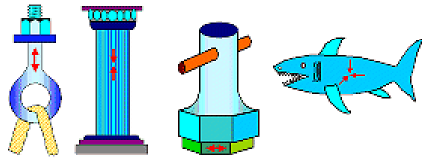
$$\underline{F} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{A}$$

$$\begin{aligned} F_x &= \sigma_{xx} \cdot A_x + \sigma_{xy} \cdot A_y + \sigma_{xz} \cdot A_z \\ F_y &= \sigma_{yx} \cdot A_x + \sigma_{yy} \cdot A_y + \sigma_{yz} \cdot A_z \\ F_z &= \sigma_{zx} \cdot A_x + \sigma_{zy} \cdot A_z + \sigma_{zz} \cdot A_z \end{aligned}$$

- Die Verknüpfung von Spannungs*tensor* $\sigma_{ij}$ und dem zugehörigen Dehnungs*tensor* $\epsilon_{ij}$ braucht im allgemeinsten Fall jetzt einen Tensor **4.** Stufe mit **81** Komponenten; die $c_{ijkl}$ heißen *elastische Koeffizienten*. ⇒
- Mit Symmetrieüberlegungen läßt sich (für die hier immer unterstellten *Einkristalle*) die Zahl der elastischen Koeffizienten reduzieren:
  - Im "schlimmstmöglichen" Fall (*trikline* Symmetrie) werden **21** elastische Koeffizienten gebraucht.
  - Im einfachsten Fall (*kubische* Gitter), reichen **2** - daraus lassen sich dann unsere altbekannte elastische Module wie ***E***, $\nu$, ***G*** oder ***K*** ableiten.

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \; & c_{11\,11} \cdot \epsilon_{11} + c_{11\,12} \cdot \epsilon_{12} + c_{11\,13} \cdot \epsilon_{13} \\ & + c_{11\,21} \cdot \epsilon_{21} + c_{11\,22} \cdot \epsilon_{22} + c_{11\,23} \cdot \sigma_{23} \\ & + c_{11\,31} \cdot \epsilon_{31} + c_{11\,32} \cdot \epsilon_{32} + c_{11\,33} \cdot \epsilon_{33} \\ \sigma_{12} = \; & c_{12\,11} \cdot \epsilon_{11} + \ldots. \\ & \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

- Der *einfachste Fall* gilt auch für beliebige *isotrope homogene* Materialien, z.B. für alle Polykristalle mit "kleinen" willkürlich orientierten Körnern oder für isotrope amorphe Materialien - und damit für die gebräuchlisten *technischen Werkstoffe*.
- Speziellen Spannungszuständen entsprechen "einfache" Tensoren. ⇒



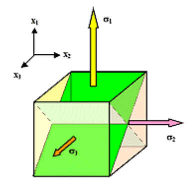
- Für einen gegebenen Tensor läßt sich durch eine geeignete Koordinatenstranformation *immer* ein Koordinatensystem finden, bei dem alle Nichtdiagonalelemente **= 0** sind. ⇒
  - Dieses **KO**-System heißt *Hauptachsensystem*.
  - Tensoren werden, soweit möglich, immer im Hauptachsensystem notiert.
  - Die verbliebenen Normalspannungen werden dann nur mit einem Index geschrieben und der Größe nach geordnet.

$$\sigma_{ij}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

- Die *maximale Scherspannung* $\tau_{max}$ die dann auftreten kann, ist gegeben durch die nebenstehende Formel. ⇒
  - Die *Ebenen* mit maximaler Scherspannung liegen unter **45°** zu den Ebenen auf denen $\sigma_1$ und $\sigma_3$ wirken.

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$



- Bedeutung:
  - Die maximal möglichen Scherspannungen bestimmen das Auftreten von *plastischer Verformung*.
  - Die maximale Nornalspannung $\sigma_1$ bestimmt das Auftreten von *Bruch*.