7.1.3 Elastische Moduln

Ein genauer Blick auf den Elastizitätsmodul

- Schauen wir uns den Zugversuch etwas genauer an. Wir haben ihn schon zweimal bemüht - in Kapitel 2 und hier in Kapitel 7.
  - Beim Anlegen einer *einachsigen* Spannung an unsere zylindrische Probe wurde diese länger (für Zugspannungen) oder kürzer (für Druckspannungen). Im elastischen Bereich reicht der **Elastizitätsmodul** $E = d\sigma/d\epsilon$ vollständig zur Beschreibung der Längenänderung.
  - Da für "normale" Materialien immer $E \approx$ **const.** gilt, folgt als "**Materialgesetz**" für die Dehnung in Zug- oder Druckrichtung :

$$\epsilon = \frac{1}{E} \cdot \sigma$$

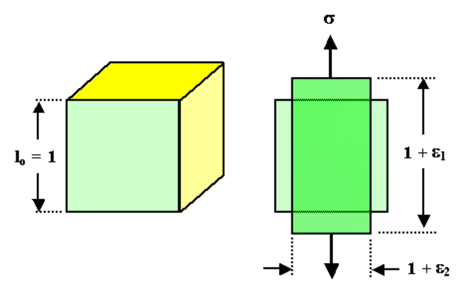
- Dieses Materialgesetz hat einige wichtige Eigenschaften, die implizit enthalten bzw. vorausgesetzt sind, und die hier aufgelistet werden sollen.
  - **1.** Es gilt für *isotrope* Materialien. Egal, in welche Richtung ich ziehe, ich erhalte immer dieselbe Verformung.
  - **2.** Es folgt *direkt* aus den Bindungspotentialen. Als Näherungsformel für E hatten wir erhalten:

$$E = \frac{n \cdot m}{r_0^3 \cdot U_0}$$

  - n, m, r_0 und U_0 waren die **4** Parameter, die ein Bindungspotential beschreiben.
  - **3.** Bei der elastischen Verformung werden *Bindungsabstände geändert* (die Ausnahme Gummi, früher schon erwähnt, wird uns noch ausführlich beschäftigen).
  - **4.** Die Verformung ist vollständig *reversibel* - mit zunehmender Spannung nimmt die Dehnung zu; wird die Spannung wieder heruntergefahren, geht die Dehnung zurück. Bis auf *Null* - der Ausgangszustand *vor* dem Zugversuch wird *nach* Ende des Versuchs wieder erreicht.
  - **5.** Das Systems "antwortet" *instantan* mit der durch das Materialgesetz gegebenen *Dehnung* ϵ auf den "Input" (oder die "Störung") *Spannung*. Es braucht nur ganz kurze Zeit (idealerweise gar keine), um auf geänderte Spannungen zu reagieren. Die beim Zugversuch vorgegebene Verformungsgeschwindigkeit $d\epsilon/dt$ spielt also keine Rolle - wir erhalten immer *dieselbe* Spannungs-Dehnungskurve.
  - **6.** Die Spannungs-Dehnungskurve ist eine *Gerade* - zumindest ungefähr, da sonst E nicht konstant sein kann. Dies bedeutet, daß wir das Bindungspotential hinreichend gut durch eine Parabel beschreiben können.
  - **7.** Die Temperaturabhängigkeit des E-Moduls ist durch die Temperaturabhängigkeit der Bindungsverhältnisse beschrieben. In der früher schon abgeleiteten Faustformel $E \approx 80 \cdot kT/\Omega$ tritt die Temperatur explizit auf. Wir erwarten generell, daß die Materialien mit zunehmender Temperatur etwas "weicher" werden, d.h. daß der E-Modul mit zunehmender Temperatur abnimmt.
- Zahlenwerte für den E-Modul finden sich in den Links
  - Wie gut ist die Faustformel für *E*?
  - Graphik und Tabelle.
- Es steckt also eine ganze Menge in dem einfachen elastischen Materialgesetz $\epsilon = \sigma/E$ - aber es reicht *trotzdem* nicht aus, um den einfachst möglichen Fall einer Verformung, der *einachsigen elastischen Verformung*, zu beschreiben.
  - Denn unsere Probe wird nicht nur *länger* (oder, bei Druck kürzer) werden, sondern auch *dünner* (oder dicker).
  - Das entspricht nicht nur der allgemeinen Erfahrung, sondern ergibt sich auch sofort falls wir unterstellen, daß sich die *Dichte* des Materials nicht nennenswert ändern kann, d.h. dass das Volumen konstant bleiben muss.
- Dieses Phänomen heißt **Querkontraktion**; wir beschreiben es zunächst rein formal.

Die Querkontraktion

- Wir greifen ein Volumenelement aus einem unter einachsigem Zug stehenden Körper heraus und betrachten seine *komplette* elastische Formänderung.



- Aus dem Einheitswürfel mit der Seitenlänge $l_0 = 1$ wird ein *Quader*.
  - In Zugrichtung hat der Quader die Länge $l_z = 1 + \epsilon_1$ und ϵ_1 ist durch den ***E***-Modul bestimmt zu $\epsilon_1 = \sigma/E$.
  - Der Würfel wird aber auch dünner werden; die Grundfläche des Quaders ist jetzt ein Quadrat mit der lateralen Seitenlänge

$$l_x = l_y = 1 + \epsilon_2$$

- In dem (notgedrungen *negativem*) ϵ_2 steckt das ganze Phänomen der *Querkontraktion*.
  - Aus der Kenntnis des ***E***-Moduls heraus können wir *keine* Aussage über ϵ_2 machen. Hinter dieser "**Querdehnung**" verbirgt sich also ein *zweiter* elastischer Modul, allgemein definiert als **Querkontraktionszahl** ν, manchmal auch **Poissonzahl** genannt.

$$\nu := -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

  - Damit haben wir

$$\epsilon_2 = -\nu \cdot \epsilon_1 = -\nu \cdot \frac{\sigma}{E}$$

- Wie kommen wir zu Aussagen über ν? Im Prinzip steckt natürlich alles in den Bindungen, aber wir können uns das Leben sehr erleichtern indem wir einfach die experimentelle Beobachtung verwenden, daß sich das *Volumen* eines verformten Körpers nicht stark ändert.
  - Als Übungsaufgabe berechnen wir die Querkontraktionszahl für $\Delta V = 0$

Übung 7.1-1
Querkontraktionszahl

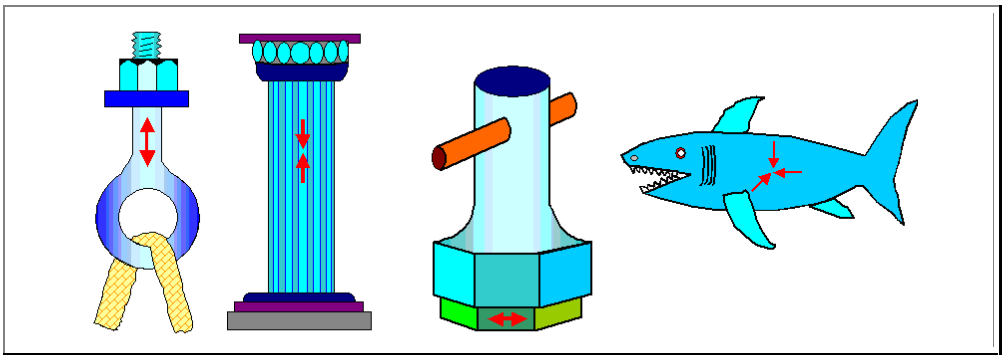
- *Alle* Querkontraktionszahlen liegen in einem relativ kleinen Wertebereich, da sonst große Dichteänderungen auftreten würden; typischerweise finden wir:

Material	ν
Metalle	0,25 - 0,35
Polymere	0,3- 0.4
Diamant	0,2 (kleinster Wert)
$\Delta V = 0$	**0,5**

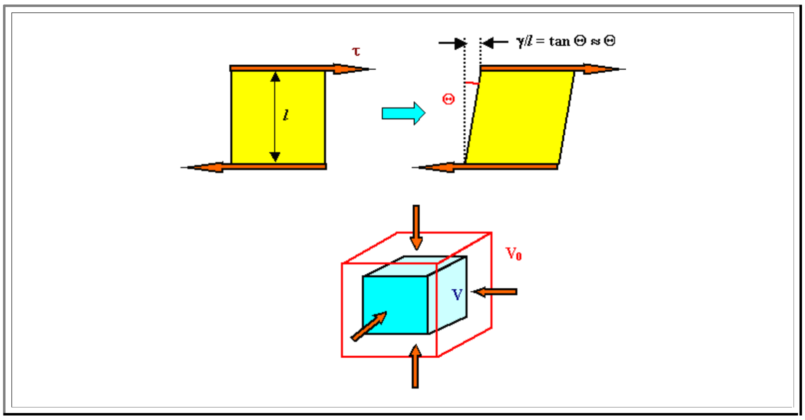
- Früher wurde gelegentlich der *Reziprokwert* der Querkontraktionszahl; die **Querzahl** verwendet.
  - Das mag zu Fehlern führen; der Unterschied ist aber eigentlich immer klar: Die *Querkontraktionszahl* ist immer **< 1**, die *Querzahl* dann immer **> 1**

Der Schub- oder Schermodul

- Der Zugversuch deckt zwar viele real vorkommende *Spannungszustände* ab - aber bei weitem nicht alle. Das Bild unten zeigt einige einfache Alltagssituationen, die besonderen, nämlich hochsymmetrischen Spannungszuständen entsprechen



- Nur die beiden linken Spannungszustände fallen unter die Rubrik "**einachsiger Zug**" bzw. "**einachsiger Druck**" und sind damit mit ***E***-Modul und Querkontraktionszahl ν *vollständig* beschreibbar.
  - Der Schraubenschlüssel dagegen verkörpert den Fall einer **reinen Scherung**. Am besten kann man sich das klarmachen, wenn man sich überlegt, was für Kräfte auf die Flächen der Schraube wirken.
  - Der Fisch wiederum unterliegt einem **allseitig gleichen Druck**, also einem speziellen (da hochsymmetrischen) *drei*achsigem Spannungszustand.
- Die zugehörigen Verformungen können nicht direkt mit ***E*** und ν beschrieben werden; wir müssen erstmal *zusätzliche* elastische Moduln definieren.
  - Wie wir in Kürze sehen werden, *müssen* wir eigentlich nicht - es ist aber sowohl zweckmäßig, als auch besser an die Historie anknüpfend, vor dem allgemeinsten Fall einer beliebigen dreiachsigen Verformung noch die oben gezeigten Spezialfälle zu behandeln.
  - Dazu schauen wir uns an, wie sich ein **Einheitswürfel** für *reine Scherung* und *allseitigen Druck* verformt.



  - Reine Scherung (nur auf einer Fläche gezeigt) verformt ein *Quadrat* zu einem *Rhombus* durch eine Abscherung um γ; allseitiger Druck läßt die Gestalt unverändert, aber verkleinert das Volumen um $\Delta V = V_0 - V$.
- Die für reine Scherung und allseitigen Druck spezifischen Formänderungen kann man mit Hilfe von Proportionalitätskonstanten mit den wirkenden Spannungen verknüpfen, die allgemein verwendeten Beziehungen sind

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

$$\Delta V = -\frac{\sigma \cdot V_0}{K}$$

- ***G*** heißt **Schubmodul**; engl "Shear modulus". ***K*** ist der **Kompressionsmodul**. Die Definitionsgleichungen für diese *elastische* Moduln sind also

$$G := \frac{\tau}{\gamma}$$

$$K := \frac{\sigma \cdot V_0}{\Delta V}$$

- Damit haben wir jetzt **4** elastische Module definiert; wir könnten so weiter machen für andere spezielle Fälle. Es drängt sich die Frage auf:
  - Wie viele elastische Moduln braucht man, um alle möglichen Spannungs- und Verformungszustände zu beschreiben?
- Die Antwort muß differenziert ausfallen:
  - Für *homogene isotrope* Materialien - ein Stück polykristallines Metall oder amorphes Glas zum Beispiel - reichen *zwei* elastische *Konstanten*.
  - Für *anisotrope* Materialien - zum Beispiel einen triklinen Einkristall - brauchen wir maximal ***21*** elastische *Koeffizienten*. Begründen werden wir das später.
- Schauen wir uns den einfachen Fall des isotropen Materials an. Die wesentliche Erkenntnis ist, daß jede Verformung durch eine geeignete *Folge* von einfachen Grundspannungszuständen erreicht werden kann.
  - Der durch allseitigen Druck verursachte Verformungszustand kann zum Beispiel (im Gedankenexperiment) alternativ auch erreicht werden, indem man den Körper *zuerst* durch einachsigen Druck entlang der ***z***-Achse verformt, dann zweitens und drittens entlang der ***x***- und ***y***-Achse.
  - Das machen wir mal in einer Übungsaufgabe:

Übung 7.1-2
Beziehung zwischen ***E***, ν und ***K***

- Die Erzeugung einer reinen Scherverformung durch mehrfach angewandten einachsigen Zug oder Druck ist etwas komplizierter; es ist in einem eigenen Modul dargestellt. Das Ergebnis ist

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \approx 0{,}4\,E \qquad (\text{für } \nu \approx 0{,}3)$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \approx 0{,}8\,E \qquad (\text{für } \nu \approx 0{,}3)$$

  - Im Prinzip ist es gleichgültig welchen Satz an **2** elastischen Moduln wir verwenden. Es ist aber - wie immer - empfehlenswert, diejenigen Größen zu wählen, die am besten zur Fragestellung passen.
- Es gibt noch weitere spezielle Spannungszustände - die Hülle eines Luftballons oder Reaktordruckkessels steht zum Beispiel unter *zweiachsigem Zug* - wir wollen jetzt aber (nach einem kleinen Einschub) gleich zum allgemeinsten Fall übergehen, dem *beliebigen elastischen* Spannungs- und Dehnungszustand in beliebigen Körpern.