

Lösungen zur Übung 6.3-1

Illustration

Wir haben die Formeln:

- Absolute Wahrscheinlichkeit $w_N(x)$ mit N digitalen (nur $+1$ und -1) Würfeln die Zahl x zu würfeln (x kann positiv *und* negativ sein).

$$w_N(x) = 0,5 \cdot \frac{N!}{2^N \cdot \{1/2 \cdot (N+x)\}! \cdot \{1/2 \cdot (N-x)\}!}$$

- Die Stirlingformel

$$\ln y! \approx (y + 1/2) \cdot \ln y - y + \ln(2\pi)^{1/2}$$

Was ergibt sich für $w_N(x)$ wenn man mit der Stirlingschen Formel die Fakultäten nähert?

- Dabei kann auch noch die physikalische Näherung $x/N \ll 1$ verwendet werden, um (über eine geeignete Reihenentwicklung) die Ausdrücke zu vereinfachen.

Vorbemerkung: So wie diese Aufgabe jahrelang in Hyperskript stand, kam am Ende ein [falsches Ergebnis](#) heraus. Das lag nicht daran, dass ich hier falsch gerechnet habe, sondern.... (*weiter unten selber gucken*)

Wir ignorieren zunächst den roten Faktor **0,5**; er stammt aus etwas tieferen Überlegungen bei der Ableitungen der Wahrscheinlichkeit. Wir können ihn später einfach wieder einsetzen

- Die Ausgangsgleichungen sind dann

$$w_N(x) = \frac{N!}{2^N \cdot \{1/2 \cdot (N+x)\}! \cdot \{1/2 \cdot (N-x)\}!}$$

$$\ln y! \approx (y + 1/2) \cdot \ln y - N + \ln(2\pi)^{1/2}$$

- Schreibt man die 1. Gleichung mit Hilfe der Stirlingschen Formel aus, erhält man

$$\begin{aligned} \ln w &= (N + 1/2) \cdot \ln N - N + \ln(2\pi)^{1/2} \\ &- \left\{ \left[\left(\frac{1}{2}(N+x) + \frac{1}{2} \right) \cdot \ln \left[\frac{1}{2}(N+x) \right] - \left[\frac{1}{2}(N+x) \right] + \ln(2\pi)^{1/2} \right\} \\ &- \left\{ \left[\left(\frac{1}{2}(N-x) + \frac{1}{2} \right) \cdot \ln \left[\frac{1}{2}(N-x) \right] - \left[\frac{1}{2}(N-x) \right] + \ln(2\pi)^{1/2} \right\} \\ &- N \cdot \ln 2 \end{aligned}$$

- Die roten und blauen Terme addieren sich zu Null, es bleibt

$$\begin{aligned} \ln w &= \left\{ (N + 1/2) \cdot \ln N - \ln(2\pi)^{1/2} - N \cdot \ln 2 \right\} \\ &- \left\{ \left[\left(\frac{1}{2}(N+x) + \frac{1}{2} \right) \cdot \ln \left[\frac{1}{2}(N+x) \right] \right\} \\ &- \left\{ \left[\left(\frac{1}{2}(N-x) + \frac{1}{2} \right) \cdot \ln \left[\frac{1}{2}(N-x) \right] \right\} \end{aligned}$$

- Der rote Zeile lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} \{ \} &= N \cdot \ln N + \frac{1}{2} \cdot \ln N - \ln (2\pi)^{1/2} - N \cdot \ln 2 \\ &= N \cdot \ln (N/2) + \ln (N/2\pi)^{1/2} \end{aligned}$$

- und den blauen Term schreiben wir als

$$N \cdot \ln (N/2) = \frac{1}{2}(N+x+1) \cdot \ln (N/2) + \frac{1}{2}(N-x+1) \cdot \ln (N/2) - \ln (N/2)$$

- Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \ln w &= \ln (N/2\pi)^{1/2} - \ln (N/2) \\ &+ \frac{1}{2}(N+x+1) \cdot \ln (N/2) \\ &+ \frac{1}{2}(N-x+1) \cdot \ln (N/2) \\ &- \left\{ \frac{1}{2}(N+x+1) \cdot \ln \left[\frac{1}{2}(N+x) \right] \right\} \\ &- \left\{ \frac{1}{2}(N-x+1) \cdot \ln \left[\frac{1}{2}(N-x) \right] \right\} \end{aligned}$$

- oder, zusammengefaßt

$$\begin{aligned} \ln w &= \ln (N/2\pi)^{1/2} - \ln (N/2) \\ &+ \frac{1}{2}(N+x+1) \cdot \{ \ln (N/2) - \ln \left[\frac{1}{2}(N+x) \right] \} \\ &+ \frac{1}{2}(N-x+1) \cdot \{ \ln (N/2) - \ln \left[\frac{1}{2}(N-x) \right] \} \end{aligned}$$

- Die erste Zeile läßt sich zusammenfassen zu

$$\ln (N/2\pi)^{1/2} - \ln (N/2) = \ln (N/2\pi)^{1/2} - \ln [(N/2)^2]^{1/2} = \ln (2/N\pi)^{1/2}$$

- Die \ln Ausdrücke in der 2. und 3. Zeile lassen sich zusammenfassen zu

$$\begin{aligned} \{ \ln (N/2) - \ln \left[\frac{1}{2}(N+x) \right] \} &= \ln \frac{N \cdot 2}{2 \cdot (N+x)} = \ln \frac{N}{N+x} = -\ln (1+x/N) \\ \{ \ln (N/2) - \ln \left[\frac{1}{2}(N-x) \right] \} &= \ln \frac{N \cdot 2}{2 \cdot (N-x)} = \ln \frac{N}{N-x} = -\ln (1-x/N) \end{aligned}$$

- Damit haben wir

$$\begin{aligned} \ln w &= \ln (2/N\pi)^{1/2} \\ &- \frac{1}{2}(N+x+1) \cdot \ln (1+x/N) \\ &- \frac{1}{2}(N-x+1) \cdot \ln (1-x/N) \end{aligned}$$

Weiter kommt man nicht, jetzt muß *genähert* werden

- N war die Zahl der digitalen Würfel, die nur $+1$ oder -1 als Augenzahl haben, x war die Summe der Augen, d.h. die gewürfelte Zahl zwischen $-N$ und $+N$.

- Da wir immer nur Systeme mit sehr großen N betrachten, ist es ziemlich unwahrscheinlich, Ergebnisse in der Nähe von $-N$ und $+N$ zu bekommen; wir können immer $x \ll N$ annehmen.
- Damit wird aus den \ln Ausdrücken der beiden letzten Zeilen näherungsweise

$$\begin{aligned} \ln(1 + x/N) &\approx +x/N \\ \ln(1 - x/N) &\approx -x/N \end{aligned}$$

- und wir erhalten

$$\begin{aligned} \ln w &\approx \ln(2/N\pi)^{1/2} \\ &\quad - \frac{1}{2}(N+x+1) \cdot (x/N) \\ &\quad + \frac{1}{2}(N-x+1) \cdot (x/N) \\ &\approx \ln(2/N\pi)^{1/2} - x^2/N \end{aligned}$$

Damit ist das Endergebnis

$$w_N(x) = \left(\frac{2}{\pi N} \right)^{1/2} \cdot \exp - \frac{x^2}{N}$$

Eine zwar etwas mühevoll, aber doch nicht wirklich schwierige Rechnung.

- Wenn wir den Faktor **0,5** von oben jetzt dazunehmen, erhalten wir

$$w_N(x) = 0,5 \cdot \left(\frac{2}{\pi N} \right)^{1/2} \cdot \exp - \frac{x^2}{N} = \left(\frac{1}{2N\pi} \right)^{1/2} \cdot \exp - \frac{x^2}{N}$$

Alles ist richtig. Gehen wir aber zurück zum Ausgangsmodul und setzen das Ergebnis ein, erhalten wir *nicht* die eigentlich erhoffte Gauss Verteilung w_{Gauss} sondern $(2)^{1/2} \cdot w_{\text{Gauss}}$. Viele Jahre lang war nicht klar, wo genau etwas schief ging. Die Lösung des Rätsels verdanke ich **Dr. Felix Scheliga** aus Hamburg:

Der "Fehler" steckt in der Näherung $\ln(1 + x/N) \approx x/N$. Sie reicht nicht aus. Man muss zumindest das zweite Glied noch mitnehmen: $\ln(1 \pm x/N) \approx x/N \mp \frac{1}{2}(x^2/N^2)$.

- Startet man damit in obiger Formel, sieht der Rechengang so aus:

$$\begin{aligned}
& \ln\left[\left(\frac{2}{\pi \cdot N}\right)^{\frac{1}{2}}\right] - \left(\frac{N+x+1}{2}\right) \cdot \left(\ln\left[1 - \frac{x}{N}\right]\right) - \left(\frac{N-x+1}{2}\right) \cdot \left(\ln\left[1 - \frac{x}{N}\right]\right) \\
&= \ln\left[\left(\frac{2}{\pi \cdot N}\right)^{\frac{1}{2}}\right] - \left(\frac{N+x+1}{2}\right) \cdot \left(\frac{x}{N} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{N^2}\right) - \left(\frac{N-x+1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{x}{N} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{N^2}\right) \\
&= \ln\left[\left(\frac{2}{\pi \cdot N}\right)^{\frac{1}{2}}\right] - \left(\frac{N+x+1}{2}\right) \cdot \left(\frac{2+N \cdot x - x^2}{2 \cdot N^2}\right) - \left(\frac{N-x+1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2+N \cdot x - x^2}{2 \cdot N^2}\right) \\
&= \ln\left[\left(\frac{2}{\pi \cdot N}\right)^{\frac{1}{2}}\right] - \left(\frac{N+x+1}{2}\right) \cdot \left(\frac{2+N \cdot x - x^2}{2 \cdot N^2}\right) + \left(\frac{N-x+1}{2}\right) \cdot \left(\frac{2+N \cdot x - x^2}{2 \cdot N^2}\right) \\
&= \ln\left[\left(\frac{2}{\pi \cdot N}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + \left(\frac{N-x+1}{2}\right) \cdot \left(\frac{2+N \cdot x - x^2}{2 \cdot N^2}\right) - \left(\frac{N+x+1}{2}\right) \cdot \left(\frac{2+N \cdot x - x^2}{2 \cdot N^2}\right) \\
&= \ln\left[\left(\frac{2}{\pi \cdot N}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + \left(\frac{2+N^2 \cdot x + N \cdot x^2 - 2 \cdot x^2 \cdot N - x^3 + 2+N \cdot x - x^2}{4 \cdot N^2}\right) - \\
&\quad \left(\frac{2+N^2 \cdot x - N \cdot x^2 + 2+N \cdot x^2 - x^3 + 2+N \cdot x - x^2}{4 \cdot N^2}\right) \\
&= \ln\left[\left(\frac{2}{\pi \cdot N}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + \\
&\quad \left(\frac{2+N^2 \cdot x + N \cdot x^2 - 2 \cdot x^2 \cdot N - x^3 + 2+N \cdot x - x^2 - 2+N^2 \cdot x + N \cdot x^2 - 2+N \cdot x^2 + x^3 - 2+N \cdot x - x^2}{4 \cdot N^2}\right) \\
&= \ln\left[\left(\frac{2}{\pi \cdot N}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + \left(\frac{x^2 - x^2 \cdot N}{2 \cdot N^2}\right) \\
&= \ln\left[\left(\frac{2}{\pi \cdot N}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + \left(\frac{x^2 \cdot (1-N)}{2 \cdot N^2}\right) \\
&= \ln\left[\left(\frac{2}{\pi \cdot N}\right)^{\frac{1}{2}}\right] - \left(\frac{x^2 \cdot (N-1)}{2 \cdot N^2}\right) \\
&= \ln\left[\left(\frac{2}{\pi \cdot N}\right)^{\frac{1}{2}}\right] - \left(\frac{x^2 \cdot N}{2 \cdot N^2}\right) \\
&= \ln\left[\left(\frac{2}{\pi \cdot N}\right)^{\frac{1}{2}}\right] - \left(\frac{x^2}{2 \cdot N}\right)
\end{aligned}$$

● Damit erhält man ein Ergebnis, das beim Einsetzen in die Ursprungsaufgabe die Gauss Verteilung liefert.

$$w_N(x) = 0,5 \cdot \left(\frac{2}{\pi N}\right)^{1/2} \cdot \exp - \frac{x^2}{2N} = \left(\frac{1}{2N\pi}\right)^{1/2} \cdot \exp - \frac{x^2}{2N}$$

Aber:

● Wir *starteten* mit einer *diskreten* Funktion $w_N(x)$, die nur unter folgenden Bedingungen sinnvolle Werte liefert:

- x, N beide ganzzahlig
- $N > x > -N; N > 0$
- x, N beide gerade oder beide ungerade.

● *Erhalten* haben wir eine *analytische* Funktion die für *jedes* positive N und jedes (positive oder negative) x einen reellen Wert liefert - ob er sinnvoll ist bleibt noch abzuwarten!

● Hier steckt wohl ein Problem. Die diversen Feinheiten der Interpretation sind aber im [advanced Modul](#) genauer dargestellt.