Zeitmittel = Scharmittel

Advanced

- Wir nehmen es als ziemlich selbstverständlich, daß wir *dieselben* statistischen Angaben über ein System vieler Teilchen auf *zwei* Weisen bekommen können.
  - Betrachten wir als Beispiel einen der Mückenschwärme, die man im Sommer als eine Art Wolke in der Luft hängen sieht (dies ist ein Beispiel, das uns später noch ausführlich beschäftigen wird).
  - Uns interessiert die *mittlere* (skalare) Geschwindigkeit der einzelnen Mücken, die ja wie irr innerhalb des Schwarms herumfliegen.
- Wir können diese mittlere Geschwindigkeit auf *zwei* Weisen messen:
  - **1.** Wir folgen *einer* wahllos herausgegriffenen Mücke für *einige Zeit*, messen ihre Geschwindigkeit zu *verschiedenen* Zeitpunkten und bilden daraus den Mittelwert - das **Zeitmittel** der gewünschten Größe.
  - **2.** Wir messen die Geschwindigkeit *hinreichend vieler* Mücken an *einem* Zeitpunkt und mitteln über die Einzelgeschwindigkeiten - wir bilden das **Scharmittel** der gewünschten Größe.
- Falls die Mücken sich in ihrem statistischen Verhalten nicht unterscheiden, müssen beide Mittelungsverfahren denselben Wert ergeben.
- Nehmen wir Würfel statt Mücken, werden wir mit *einem* Würfel nach *vielen* Würfen den Mittelwert **(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)/6 = 3,5** bekommen, und wir werden diesen Wert auch finden falls wir mit *vielen* Würfeln *einen* Wurf machen .
- Nun betrachten wir ein System von ***N*** klassischen Teilchen - Atome, Molekülen, Kügelchen. Jedes dieser Teilchen hat zum Zeitpunkt ***t*** einen wohldefinierten Ort ***r*** und einen Impuls ***p*** (beides Vektoren).
  - Wir definieren einen **6*N***-dimensionalen Raum, aufgespannt von den **3*N*** Koordinatenkomponenten und den **3*N*** Impulskomponenten.
  - Der komplette Zustand unseres ***N***-Teilchensystems zum Zeitpunkt ***t*** ist in diesem **Phasenraum** durch *einen einzigen* Punkt beschrieben.
- Was macht das System zum Zeitpunkt $t + \Delta t$?
  - Es ist immer noch durch *einen einzigen* Punkt beschrieben - nur ist der Punkt jetzt woanders im Phasenraum. Nach sehr kurzen Δt kann er aber nicht "sehr weit weg" sein vom alten Zustandspunkt.
  - Verfolgen wir den Zustandspunkt für einige Zeit, läuft er auf irgendeiner Bahn, einer **Trajektorie**, durch den Phasenraum. Wir können für diese Bahn statistische Größen definieren, z.B. das Zeitmittel des mittleren Impulses, der Geschwindigkeit, der gesamten Energie, oder auch hochdimensionaler Größen. (Mathematiker haben kein Problem Geschwindigkeiten in höherdimensionalen Räumen zu postulieren).
  - Wird dieses Zeitmittel für reale physikalische Systeme denselben Wert ergeben wie das Scharmittel? Was ist das Scharmittel in diesem Fall?
- Das Scharmittel erhalten wir offenbar falls wir die Zustandspunkte *vieler* vergleichbarer ***N***-Teilchensysteme in einen Phasenraum eintragen - wir erhalten eine Verteilung von ***N*** Punkten, die alle auf ihren jeweiligen Trajektorien durch die (**6*N***-dimensionale) Gegend laufen.
- Ist Zeit- und Scharmittel eines physikalischen Systems im Phasenraum identisch? Immer? Oder nur unter spezifischen Voraussetzungen?
  - Die Antwort ist nicht ganz einfach, aber ein zentrales Lemma der statistischen Physik: Es gilt die **Ergodenhypothese**: Zeit- und Scharmittel sind für *ergodische Systeme* identisch!
- In dieser Form ist die *Ergodenhypothese* natürlich eine Tautologie - wir müssen jetzt definieren was ergodische und nicht-ergodische Systeme unterscheidet. Die Fußnote [1] gibt dazu ein weiteres Beispiel.
  - Das ist nicht einfach - nicht umsonst heißt es Ergoden*hypothese*!
  - Für unsere Zwecke reicht es aber zu wissen, daß alle "normalen" physikalischen System mit einer statistischen Komponente ergodische Systeme sind: *Gase* mit statistisch herumfliegenden Teilchen, *Kristalle* mit statistisch vibrierenden Atomen, *Leerstellen* in Kristallen, die statistisch (d.h. mit "random walk") durch den Kristall diffundieren.
- Wir haben hier ein Beipiel eines "großen" Gedankens - die "Erfindung" des Phasenraum gekoppelt mit einem nichttrivialen Problem der statistischen Betrachtung.
  - Und wer **6*N***-dimensionale Räume für nutzlos, weil zu theoretisch-abstrakt hält, wird sich noch wundern: Sie spielen eine zentrale Rolle nicht nur in der gesamten statistischen Physik, sondern insbesondere auch in der nichtlinearen Dynamik, also bei allem was auch nur entfernt mit Chaos, Synergie, Regelung, usw. zu tun hat.

---

[1] Ist eine Gesellschaft, z.B. die Deutsche oder Amerikanische, bezüglich der momentanen Einkommen ein ergodisches System? In anderen Worten: Erhält man, wenn man das (inflationsbereinigte etc.) Einkommen eines beliebigen Individuums über sehr lange Zeiten verfolgt denselben Mittelwert, wie wenn man das mittlere Einkommen aller Individuen zu einem Zeitpunkt berechnet? Wird jeder (oder halt seine Nachkommen) früher oder später sowohl mal Millionär als auch

bitterarm?

Die Unterschiede der Gesellschaftssysteme lassen sich auch daran festmachen. Die Amerikaner sehen sich eher als ergodisches System, die (derzeit über **Hartz 4** wehklagenden Deutschen) eher nicht.