Stirlingsche Formel

Basics

- Die Stirlingsche Formel ist ein unverzichtbares Hilfsmittel bei allen kombinatorischen und statistischen Formeln; sie ermöglicht mit **Fakultäten** einfach zu rechnen.
- Sie existiert in *mehreren* Versionen, die verschiedene Genauigkeitsgrade darstellen. Sie ist relativ leicht in einfacher Form ableitbar:
  - Es ist

$$\ln x! = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln x$$

$$\ln x! = \sum_{1}^{x} \ln y$$

  - mit **y =** die ganzen positive Zahlen beginnend bei **1**.
- Für große **y** kann man statt der Summe näherungsweise ein Integral nehmen, es gilt $\ln y \approx \int \ln y \cdot dy$ (von **1** bis **x**). Es gilt

$$\sum_{1}^{x} \ln y \approx \int_{1}^{x} \ln y \cdot dy$$

$$\int_{1}^{x} \ln y \cdot dy = y \cdot \ln y - y$$

  - Nach Einsetzen der Integrationsgrenzen erhält man

$$\ln x! \approx \int_{1}^{x} \ln y \cdot dy = y \cdot \ln y - y \Big|_{1}^{x} = x \cdot \ln x - x + 1$$

- Das ist die *einfache* und leicht zu verstehende Version der Stirlingformel.
  - Für sehr große **x** kann man auch noch den Term **x + 1** gegenüber **x · ln x** vernachlässigen und erhält die ganz simple und in der Regel verwendeteVersion

$$\ln x! \approx x \cdot \ln x$$

- Damit hat man aber nicht nur eine numerische Näherung genacht, sondern aus einer *diskreten* Funktion, die nur für *ganze positive* Zahlen definiert ist und als Ergebis auch immer nur ganze positive Zahlen haben kann, eine *kontinuierliche* Funktion gemacht, die für *alle* Zahlen ausgerechnet werden kann, wobei aber offen bleibt, was der Wert für z.B. **3,73!** bedeutet.
  - Das hat Konsequenzen, z.B. den bei der Herleitung der Gaußverteilung verbundenen Übergang von *absoluten*Wahrscheinlichkeiten zu Wahrscheinlichkeitsdichten.
- Eine noch genauere Näherung, die aber nicht mehr leicht herleitbar ist und schon für $x \leq 10$ ganz gut ist, gibt die folgende Version der Stirlingschen Formel

$$\ln x! \approx \ln (2\pi^{1/2}) + (x + 1/2) \cdot \ln (x) - x$$