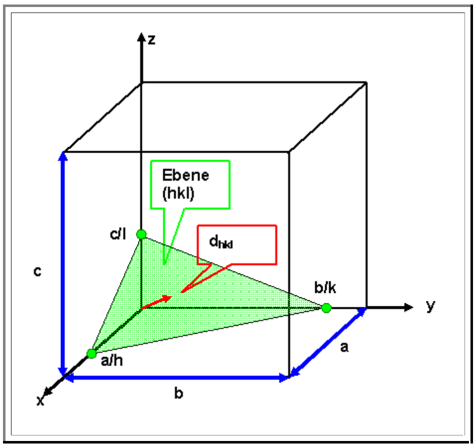
Lösung zur Übung 3.2-3

Illustration

- Zeige, dass für ein orthombisches Bravaisgitter, die Ebenen mit der Miller Indizierung **{hkl}** folgenden Abstand d_{hkl} haben

$$d_{hkl} = \frac{1}{\{(h/a)^2 + (k/b)^2 + (l/c)^2\}^{1/2}}$$

- Entscheidend ist eine sinnvolle Zeichnung:



- Das Gitter ist im Prinzip orthorhombisch, auch wenn es ziemlich kubisch aussieht. Die grüne Ebene hat *beliebige* Indizes **h, k, l >1**. Dadurch liegen die Schnittpunkte in der **EZ**. Entscheidend ist, dass man folgende Zusammenhänge erkennt:
  - **1.** Der Abstand zur nächsten Ebene der durch **{hkl}** definierten Ebenenschar ist durch die Länge des roten Vektors gegeben, der vom Ursprung ausgeht und senkrecht auf **{hkl}** steht. Denn der Ursprung liegt immer auf einer Ebene der Ebenenschar.
  - **2.** Die Länge der Strecken vom Ursprung zu den Schnittpunkten der Ebene mit den Achsen ist **a/*h***, **b/*k***, bzw. **c/*l***. Das folgt direkt aus der Definition von **h**, **k** und **l**, die ja reziprok die Schnittpunkte in Einheiten der Gitterparameter angeben.
- Der Rest ist jetzt Geometrie.
  - Zunächst berechnen wir, wie lang der rote Vektor $\underline{d}_{hkl}$ ist. Dazu definieren wir die Winkel, die er mit den Koordinatenachsen bildet als α_x, α_y und α_z.
  - Für die aus Ursprung, Endpunkt von $\underline{d}_{hkl}$, und den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen gebildeten Dreiecke gilt

$$d_{hkl} = \frac{a}{h} \cos\alpha_x = \frac{b}{k} \cos\alpha_y = \frac{c}{l} \cos\alpha_z$$

- Wenn man sich jetzt an die Eulersche Beziehung zwischen den Cosinüssen erinnert, liegt nahe, die Terme zu quadrieren und dann zu addieren. Wir erhalten

$$\underbrace{\cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_y + \cos^2\alpha_z = 1}_{\text{Eulersche Beziehung}} = (d_{hkl})^2 \cdot \left((h/a)^2 + (k/b)^2 + (l/c)^2\right)$$

- Damit sind wir fertig. Für den gesuchten Abstand d_{hkl} ergibt sich

$$d_{hkl} = \frac{1}{\{(h/a)^2 + (k/b)^2 + (l/c)^2\}^{1/2}}$$

q.e.d.

- Die im Rückgrat gegebene Formel für kubische Gitter erhält man sofort durch die dann gültige Beziehung $a = b = c = a_0$ zu

$$d_{hkl}(\text{kubisch}) = \frac{a_0}{(h^2 + k^2 + c^2)^{1/2}}$$