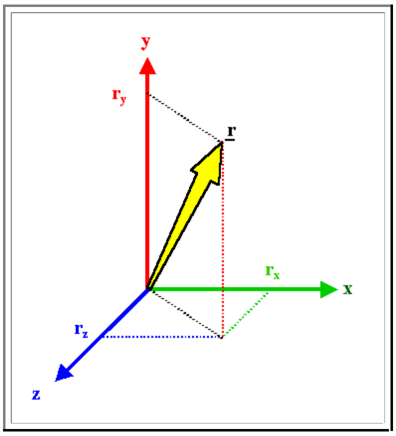
Vektorrechnung

- In diesem Modul werden nur einige grundsätzliche Bemerkungen gemacht und die wichtigsten Formeln der **Vektorrechnung** zusammengestellt.
  - Wer nicht bereits halbwegs mit der Vektorrechnung vertraut ist, tut gut daran, ganz schnell entsprechende Mathe- oder Physikbücher zu konsultieren.
  - Wir symbolisieren Vektoren in diesem Modul immer durch Unterstriche

Basics

Was sind Vektoren?

- Es ist gar nicht so einfach, außerhalb der "reinen" Mathematik zu definieren was *genau* ein Vektor ist. Es ist aber auch nicht so furchtbar wichtig, da es für den "Normalgebrauch" fast immer klar genug ist.
- Für unsere Zwecke ist ein Vektor ein *physikalisches Objekt*, d.h. eine real existierende Größe wie die Geschwindigkeit, die elektrische Feldstärke oder eine Kraft, die *immer* beschrieben werden muß durch einen Betrag *und* eine Richtung.
  - Ein Vektor kann damit durch einen Pfeil repräsentiert werden, dessen Länge dem Betrag entspricht und dessen Richtung eindeutig durch die Pfeilspitze gegeben ist.
  - In einem willkürlich gewählten Koordinatensystem (zur Einfachheit mit Ursprung am Pfeilende) kann jeder Vektor dann durch seine drei **Komponenten** (den Projektionen auf die Achsen) eindeutig beschrieben werden.



- Damit erschließen sich sofort die wesentlichsten Eigenschaften, die zwar in der folgenden Auzählung etwas redundant sind, aber damit auch mehr Klarheit schaffen.
- **1.** Zwei Vektoren sind *gleich*, falls sie in Betrag und Richtung übereinstimmen.
  - Eine einfache Aussage, aber mit "Tiefgang". Da eine Parallelverschiebung im Raum den "Pfeil" *nicht* ändert, sind zwei Vektoren *auch dann noch gleich*, wenn sie irgendwo im Koordinatensystem zu finden sind. Das hat eine sofortige Konsequenz:
  - Durch Pfeile repräsentierbare physikalische Größen, bei denen eine Verschiebung des Pfeils eine *unterschiedliche* Situation ergibt, sind dann *keine* Vektoren im strengen Sinn!
  - Ein Beispiel dazu: Eine Kraft $\underline{F}$, die auf einen *Massenpunkt* **P** wirkt, ist ein Vektor - denn es ist egal, wo genau im Raum sie auf **P** wirkt, es geschieht immer dasselbe.
  - Eine Kraft ***F***, die auf einen *Hebelarm* wirkt, ist *kein* Vektor in voller Strenge, denn was geschieht ist vom *Drehmoment* = Kraft mal Hebelarm abhängig; eine Verschiebung von ***F*** produziert eine neue Situation.
- **2.** Vektoren werden *addiert* indem man (in cartesischen **KO**-Systemen) ihre Komponenten addiert (dabei beginnen die Vektoren immer im **0**-Punkt des **KO**-Systems, wir dürfen sie ja beliebig verschieben).
  - Mit

$$\underline{F}_1 = (x_1, y_1, z_1)$$

$$\underline{F}_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

  - folgt

$$\underline{F}_3 = \underline{F}_1 + \underline{F}_2$$

$$= (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2)$$

- Umgesetzt auf physikalische Größen begrenzt diese Definition wiederum die Vielfalt der möglichen Vektoren. In Worten sagt das Additionsprinzip:

Kommt man von einem gegebenen physikalische Zustand zu einem anderen, indem man erst entlang des Vektors $\underline{r}_1$ läuft, und anschließend entlang des Vektors $\underline{r}_2$, so ist der dann erreichte Zustand identisch zu dem Zustand den man erreicht wenn man gleich vom Ausgangszustand entlang dem Vektor $\underline{r}_3 = \underline{r}_1 + \underline{r}_2$ läuft.

- Das ist am besten zu verstehen, indem man sich anschaut für welche "Pfeile" dies gilt und für welche es *nicht* gilt.
- Die Aussage gilt sicherlich für Ortsvektoren, aber auch z.B. für Geschwindigkeiten, Beschleunigungen oder Feldstärken.
- Sie gilt aber beispielsweise *nicht* für Pfeile die Drehungen symbolisieren indem man den "Drehpfeil" in die Drehachse legt und sein Länge proportional zum Drehwinkel macht. Zum Beispiel produziert eine Drehung um **90^o** um die **x**-Achse, gefolgt von einer Drehung um **90^o** um die **y**-Achse, einen ganz anderen Zustand als *eine* Drehung um die "Summenachse" (mal in Gedanken für ein schleuderndes Auto probieren!).

3. Vektoren sind *invariant* gegenüber einer Koordinatentransformation.

- Das muß so sein - schließlich kann die Beschreibung einer physikalische Größe nicht davon abhängen, wie wir ein Koordinatensystem wählen. Ist der Pfeil einmal definiert, wird er immer gleich bleiben, egal, wie wir das **KO**-System aufspannen.
- Das gilt aber nur für den Pfeil "an sich" - den *Vektor* - nicht für die *Zahlenwerte* seiner Komponenten. Diese sind notgedrungen immer auf das **KO**-System bezogen.

Damit sind die **Transformationseigenschaften** der Komponenten eines Vektors festgelegt. Hat der Vektor im **x-y-z KO**-System die Komponenten **(x_1, y_1, z_1)**, müssen sich die Zahlenwerte **(x'_1, y'_1, z'_1)** in irgendeinem neuen System **x'-y'-z'** in eindeutiger und definierter Weise aus der Transformationsvorschrift (= Transformationsmatrix) errechnen lassen, die das neue System produziert.

- Ein wichtiger Punkt am Rande: Die Aussage, daß ein Vektor beim Wechsel des Koordinatensystems unverändert bleibt, gilt zwar *auch* bei einem Wechsel von cartesischen zu nicht-cartesischen Systemen, beispielsweise beim Übergang von **x-y-z** Koordinaten zu Polarkoordinaten - *aber das gilt nicht immer für die Rechenvorschriften*. Zwei Vektoren in Polarkoordinaten werden *nicht* addiert, indem man ihre Komponenten addiert - mal ausprobieren!

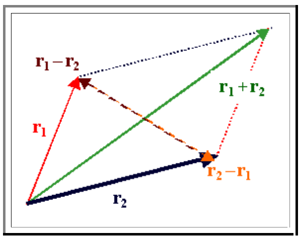
Das reicht eigentlich schon. Denn daraus folgt die wesentliche Nutzung: *Vektorgleichungen sind unabhängig von Koordinatensystem* - und damit läßt sich das Leben erheblich vereinfachen!

- $\underline{F} = m \cdot \underline{a}$ gilt in jedem System: cartesisch, polar, krumm - es ist egal.

Rechnen mit Vektoren

Im folgenden werden nur noch die wichtigsten Formeln als Gedächnisstütze gegeben - eine gewisse Vertrautheit mit Vektorrechung wird vorausgesetzt.

Die **Addition und Subtraktion von Vektoren** ist klar - graphisch erhalten wir die Diagonalen im Vektorparallelogramm.



- Numerisch addieren oder subtrahieren wir, wie oben schon ausgeführt, indem wir die Komponenten addieren oder subtrahieren - aber bitte *nur in cartesischen KO-Systemen*!

- Addition und Subtraktion sind kommutativ und assoziativ:

$$\underline{x} + \underline{y} \;=\; \underline{y} + \underline{x}$$

$$(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z} \;=\; \underline{x} + (\underline{y} + \underline{z})$$

$$=\; \underline{y} + (\underline{x} + \underline{z})$$

- Daß man in anderen **KO**-Systen aufpassen muß wird sofort klar, wenn wir z.B den Vektor $\underline{u} = (r, \phi)$, gegeben durch die Komponenten r und ϕ in Polarkoordinaten, zu sich selbst addieren, d.h. schlicht seine Länge verdoppeln. Die Addition der Komponenten gibt offenbar etwas falsches!

Skalarprodukt und Vektorprodukt

- Nach der Addition und Subtraktion, ist die Verknüpfung der Multiplikation zu behandeln. Dies kann man bei Vektoren auf *zwei* sinnvolle Arten tun: **Skalarprodukt** und *Vektorprodukt*.
- Das **Skalarprodukt** verknüpft zwei Vektoren zu einem Skalar. Das Skalarprodukt S zweier Vektoren $\underline{A}$ und $\underline{B}$ ist wie folgt definiert

$$S \;=\; \underline{A} \cdot \underline{B} = |\underline{A}| \cdot |\underline{B}| \cdot \cos(\underline{A},\underline{B}) = A \cdot B \cdot \cos(\underline{A},\underline{B})$$

- Mit $(\underline{A},\underline{B})$ = Winkel zwischen $\underline{A}$ und $\underline{B}$
- Skalarprodukte sind kommutativ und distributiv:

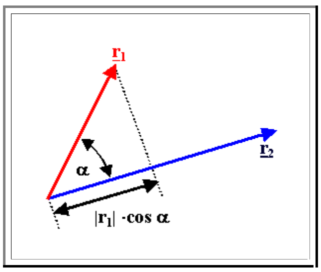
$$\underline{A} \cdot \underline{B} \;=\; \underline{B} \cdot \underline{A}$$

$$\underline{A} \cdot (\underline{B} + \underline{C} + \underline{D} + \ldots.) \;=\; \underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{A} \cdot \underline{C} + \underline{A} \cdot \underline{D} + \ldots.$$

- In cartesischen **KO**-Systemen erhält man das Skalarprodukt durch die Summation der Produkte gleichartiger Komponenten, d.h.

$$S \;=\; \underline{A} \cdot \underline{B} \;=\; A_x \cdot B_x + A_y \cdot B + A_z \cdot B_z$$

- Man erkennt ansatzweise die Eleganz der Vektorrechnung: Das Skalarprodukt zweier Vektoren, die senkrecht aufeinanderstehen, ist immer = **0** - egal welchen numerischen Wert die Komponenten in irgendeinem Koordinatensystem haben.
- Das Skalarprodukt kann man leicht interpretieren



- Da $|\underline{A}| \cdot \cos(\underline{A},\underline{B})$ gleich der Projektion des Vektors $\underline{A}$ auf die Richtung von $\underline{B}$ ist (und umgekehrt), ist das skalare Produkt identisch zu der Länge des einen Vektors multipliziert mit der *projezierten* Länge des anderen.
- Das Skalarprodukt hat eine herausragende Eigenschaft: Im Vergleich zu "normalen" Produkten - d.h. dem Produkt zweier Skalare - kann es auch dann **= 0** sein, wenn beide "Faktoren" ungleich Null sind.

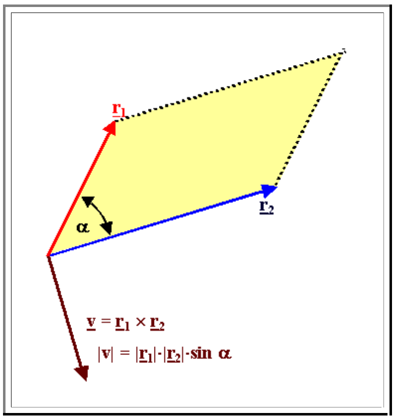
- Das Skalarprodukt kann man auch nutzen, um den Betrag eines Vektors einfach zu berechen. Dazu bilden wir einfach das Skalarprodukt des Vektors $\underline{A}$ mit sich selbst und erhalten

$$\underline{A} \cdot \underline{A} \;=\; A_x \cdot a_x + A_y \cdot B_a + A_z \cdot a_z \;=\; A^2$$

oder

$$A \;=\; |\underline{A}| \;=\; (\underline{A}^2)^{½}$$

- Das **Vektorprodukt** verknüpft zwei Vektoren zu einem neuen Vektor. Das Vektorprodukt $\underline{V}$ zweier Vektoren $\underline{A}$ und $\underline{B}$ ist wie folgt definiert:



- **1** $\underline{V}$ steht senkrecht auf der von $\underline{A}$ und $\underline{B}$ aufgespannten Ebene.
- **2.** Für den Betrag gilt

$$|\underline{V}| = V = S = \underline{A}| \cdot |\underline{B}| \cdot \sin(\underline{A},\underline{B})$$

$$= A \cdot B \cdot \sin(\underline{A},\underline{B})$$

- Mit **$(\underline{A},\underline{B})$ =** Winkel zwischen $\underline{A}$ und $\underline{B}$
- **3.** Die Richtung von $\underline{V}$ wird durch eine "rechte Handregel" gegeben. Im Klartext: Daumen und Zeigefinger der rechten Hand bilden einen rechten Winkel. Der Zeigefinger repräsentiert den Vektor $\underline{A}$; er wird in Richtung $\underline{B}$ gedreht so daß die Handfläche zeigt auf $\underline{B}$. Der Daumen zeigt dann in Richtung von $\underline{V}$. Anders ausgedrückt: In Richtung von $\underline{V}$ blickend, muß die im Uhrzeigersinn erfolgende Drehung von $\underline{A}$ auf $\underline{B}$ den kleinstmöglichen Winkel überdecken.

- Die wesentlichen Eigenschaften sind

$$\underline{V} = \underline{A} \times \underline{B}$$

$$= -\,\underline{B} \times \underline{A}$$

- d.h. das Vektorprodukt ist *nicht* mehr *kommutativ*. Es ist aber immer noch *distributiv*, d.h.

$$\underline{A} \times (\underline{B} + \underline{C} + \underline{D} + \ldots.) = \underline{A} \times \underline{B} + \underline{A} \times \underline{C} + \underline{A} \times \underline{D} + \ldots.$$

- Damit gilt auch

$$a \cdot \underline{A} \times \underline{B} = a \cdot (\underline{A} \times \underline{B}) = \underline{A} \times a \cdot \underline{B}$$

- Die Komponenten von $\underline{V}$ errechnen sich in *cartesischen KO-Systemen* wie folgt

$$V_x = A_y \cdot B_z - A_z \cdot B_y$$

$$V_y = A_z \cdot B_x - A_x \cdot B_z$$

$$V_z = A_x \cdot B_y - A_y \cdot B_z$$

- Das kann man auch als [Determinante]() schreiben:

$$\underline{V} = \underline{A} \times \underline{B} = \begin{vmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

- Mit $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$ = Einheitsvektoren in den Achsenrichtungen.

Das Vektorprodukt hat einige wichtige direkt intepretierbare Eigenschaften:

- Falls $\underline{A} \times \underline{B} = \mathbf{0}$, müssen die beiden Vektoren parallel sein. Insbesondere ist $\underline{A} \times \underline{A} = \mathbf{0}$.
- Die Fläche des von den Vektoren $\underline{A}$ und $\underline{B}$ aufgespannten Parallelogramms ist gleich dem Betrag von $\underline{A} \times \underline{B}$.

Mehrfachprodukte

Produkt eines Vektors mit dem Skalarprodukt zweier anderer Vektoren

- Multiplizieren wir den Vektor $\underline{A}$ mit dem Skalar produkt $\underline{B} \cdot \underline{C}$ zweier anderer Vektoren, ändern wir einfach die Länge von $\underline{A}$.
- Es gilt

$$\underline{A}' = \underline{A} \cdot (\underline{B} \cdot \underline{C})$$

- Aufpassen muß man nur, weil wir *zwei* verschiedene Multiplikationen haben, insbesondere ist

$$\underline{A} \cdot (\underline{B} \cdot \underline{C}) \neq (\underline{A} \cdot \underline{B}) \cdot \underline{C}$$

Skalarprodukt eines Vektors mit dem Vektorprodukt zweier anderer Vektoren

- Wir erhalten einen Skalar, der auch **Spatprodukt** genannt wird. Der resultierende Skalar ergibt das Volumen des von den drei Vektoren gebildeten Parallelepipeds.

$$V = \underline{A} \cdot (\underline{B} \times \underline{C})$$

- Es gilt

$$\begin{aligned} \underline{A} \cdot (\underline{B} \times \underline{C}) &= + \underline{B} \cdot (\underline{C} \times \underline{A}) \\ &= + \underline{C} \cdot (\underline{A} \times \underline{B}) \\ &= - \underline{A} \cdot (\underline{C} \times \underline{B}) \\ &= - \underline{B} \cdot (\underline{A} \times \underline{C}) \\ &= - \underline{C} \cdot (\underline{B} \times \underline{A}) \end{aligned}$$

- Eine etwas trickreiche Vorzeichensache, die man wiederum viel eleganter in Determinantenform ausdrücken kann:

$$\underline{A} \cdot (\underline{B} \times \underline{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$