Lösung zur Übung 2.1-7

Tunneleffekt

Illustration

1. Wie verhält sich ein klassisches Teilchen in dem Barrierenpotential?

- Ein klassisches Teilchen würde von der Barriere bei $x = 0$ vollkommen reflektiert werden.

2. Wie lautet die Schrödinger-Gleichung eines Teilchens in Gebiet **(I)**?

- Siehe die Lösung zu Aufgabe 2.1-5

4. Eine allgemeine Lösung Schrödinger-Gleichung in Gebiet **(II)** ist:
$\psi_2(x) = C \cdot \exp -(\kappa \cdot x) + D \cdot \exp +(\kappa \cdot x)$ .Welchen Wert nimmt der Wellenvektor κ in diesem Gebiet an?

- Der Wellenvektor κ im Gebiet **(II)** hat den Wert
  $\kappa^2 = 2m(V_0 - E)/\hbar^2$,
  siehe die Lösung zu Aufgabe 2.1-5 (in der wir α statt κ geschrieben haben).

5. Die Lösung der Schrödinger-Gleichung in Gebiet **(III)** lautet:
$\psi_3(x) = F \cdot \exp +(ikx)$
mit dem Wellenvektor
$k = (2mE)^{½}/\hbar$ =
wie zuvor.

Warum macht eine Lösung der Form
$\psi_3(x) = F \cdot \exp -(i\kappa \cdot x) + G \cdot \exp +(i\kappa \cdot x)$, d.h. mit einem zweiten Summand mit negativen Exponent wie in Gebiet **(1)**, keinen Sinn?

- Im Gebiet **(III)** macht eine Lösung mit einem *negativen* Argument in der Exponentialfunktion keinen Sinn, da es keine *rücklaufende* Welle gibt.
- Die Eponentialfunktionen beschreiben nämlich nichts anderes als die *Momentaufnahmen* von Wellen, die in x bzw. $-x$ Richtung laufen.
- Vor der Potentialbarriere kann es in voller Allgemeinheit beide Arten geben; die in $-x$ laufende Welle trifft aber nie auf die Barriere. Wellen, die durch die Barriere durchgetunnelt sind, müssen notwendigerweise in $+x$ Richtung laufen.
- Das muß man an dieser Stelle noch so richtig verstehen - es geht nur darum zu sehen, wie man mit der Schrödingergleichung rechnen kann und selbst bei relativ simplen Problemen auf ganz neuartige Dinge stößt.

6.Um den Zusammenhang der Konstanten ***A***, ***B***, ***C***, ***D*** und ***F*** zu ermitteln muß man welche Bedingungen verwenden?

- Die *Stetigkeitsanforderungen* an die Wellenfunktion ψ *und* ihre Ableitungen.
- Für $x = a$ lauten sie beispielsweise
  : .
- Stetigkeit für ψ

$$A \cdot \exp(-ika) + B \cdot \exp(+ika) = C \cdot \exp(+\kappa a) + D \cdot \exp(-\kappa a)$$

- Stetigkeit für $d\psi/dx$: .

$$-Aik \cdot \exp(-ika) + Bik) \cdot \exp(+ika) = C\kappa \cdot \exp(+\kappa a) + D\kappa \cdot \exp(-\kappa a)$$

- Daß die Wellenfunktion und ihre Ableitung stetig sein muß. ist einerseits "irgendwie" klar, aber gar nicht so ganz einfach sauber zu begründen.
- Wie auch immer, wir bekommen **4** Gleichungen für die *fünf* Unbekannten ***A,B,C,D*** **und** ***F*** - eine zuwenig. Aber wir haben auch noch die *Normierungsbedingung* als **5.** Gleichung!
- Damit kann man - mühsam, mühsam - die Koeffizienten ausrechnen. Das mag lange dauern, zu langen Formeln führen, oder sogar analytisch gar nicht machbar sein. Es ist aber auch nicht komplizierter als das Balkenbiegen in der technischen Mechanik mit stückweise zusammengesetzten Lösungem bei ungleichmäßig belasteten Balken mit diversen Einspannungen

7. Für den hier betrachteten Fall eines von links einlaufenden Teilchens kann man folgenden Zusammenhang zwischen den Konstanten ***A***, ***B*** und ***F*** ermitteln:

$$A = F \cdot \cosh(2\kappa a) + i \cdot \delta \cdot 2\sinh(2\kappa a) \cdot \exp(2ika)$$

$$B = -F \cdot i\,\eta \cdot 2\sinh(2\kappa a)$$

Dabei gilt:

$$\delta = \kappa k - k\kappa$$

$$\eta = \kappa k + k\kappa$$