Lösungen zur Übung 2.2-1:

Folgerungen aus der Bohrschen Quantenbedingung

Illustration

1. Zeige, daß die Gleichung für die erlaubten Radien der Elektronenbahn aus den gegebenen zwei Gleichungen resultiert.:

Aus

$$\mathbf{m v} r = n \cdot \hbar$$

- folgt durchUmsellen

$$v = \frac{n \cdot \hbar}{m \cdot r}$$

- Einsetzen in die Kräftegleichgewichtsformel $ze^2/4\pi\epsilon_0 r^2 = mv^2/r$ gibt direkt

$$r_n = \frac{n^2 \cdot h^2 \cdot \epsilon_0}{z \cdot \pi \cdot e^2 \cdot m}$$

2. Berechne *potentielle*, *kinetische* und *Gesamtenergie* des Elektrons als Funktion der Quantenzahl:

- Multipliziert man die Kräftegleichgewichtsformel mit r, erhält man

$$\frac{z \cdot e^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} = m \cdot v^2 = 2E_{kin}$$

- Die rechte Seite ist also die doppelte kinetische Energie des Systems.
- Die potentielle Energie entspricht der Arbeit, die man gewinnt, falls man das Elektron aus dem Unendlichen zur Position r bringt. Wir haben also

$$E_{pot} = \int_{\infty}^{r} \frac{z \cdot e^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r'^2} \cdot dr' = -\frac{z \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot r}$$

- Das ist genau die rechte Seite der obigen Gleichung.

Damit gilt

$$|E_{pot}| = = 2E_{kin} \qquad \textit{q.e.d.}$$

$$E_{ges} = E_{kin} + E_{pot} = -E_{kin} = -\tfrac{1}{2}mv^2$$

- Die potentielle Energie muß vorzeichenrichtig, d.h. mit dem Minuszeichen engesetzt werden. Die Gesamtenergie ist dann, wie es sein muß, *negativ*, d.h. das Elektron ist *gebunden*.
- Mit der Formel für die Geschwindigkeit von oben ergibt sich

$$E_{ges} = -\frac{m \cdot (n \cdot h)^2}{2 \cdot (2\pi \cdot m \cdot r)^2} = -\frac{n^2 \cdot h^2}{8m \cdot \pi^2 \cdot r^2}$$

- Setzen wir noch ***r*** von oben ein, haben wir

$$E_{ges} = -\frac{n^2 \cdot h^2}{8m \cdot \pi^2} \cdot \frac{\pi^2 \cdot e^4 \cdot m^2}{n^4 \cdot h^4 \cdot \epsilon_0^2} = \frac{m\, e^4}{8\, h^2 \epsilon_0^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

3. Berechne die *Umlauffrequenz* ν als Funktion von ***n***:

- Die Umlauffrequenz ν ist der Kehrwert der Umlaufzeit $t_u = 2\pi r/v$, wir haben also mit den Ausdrücken für **v** and ***r*** von oben

$$\nu = \frac{v}{2\pi \cdot r} = \frac{m \cdot e^4}{4 \cdot h^3 \cdot \epsilon_0^2} \cdot \frac{1}{n^3}$$

4. Berechne die *Energiedifferenz* zwischen zwei Bahnen mit den Quantenzahlen **n** und **m**:

- Die Energiedifferenz $\Delta E_{n,m}$ zu den Quantenzahl ***n*** und ***n'*** ist

$$\Delta E_{n,m} = \frac{me^4}{8h^2\epsilon_0^2} \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right)$$