Rechnen mit komplexen Zahlen

Einführung

Basics

- In der **klassischen Physik**, aber auch in der Elektrotechnik oder Materialwissenschaft, wird oft mit *komplexen Zahlen* gerechnet, obwohl alle berechneten (und letztlich auch immer meßbaren) Größen immer *reell* sind.
  - Es gibt in der *klassischen Physik* keine *imaginären* Energien, Orte, Zeiten, Spannungen, Ströme usw.! Die Einführung komplexer Größen dient *nur* der Bequemlichkeit beim Rechnen. Im Endergebnis treten nur reelle Zahlen auf - im Zweifel nimmt man vom Ergebnis nur den Realteil oder den Imaginärteil.
- *In der Quantenmechanik ist das anders*. Die konventionellen *meßbaren Größen*, die zwar letztlich immer als Endergebnis erscheinen, sind zwar auch *immer reell*, aber die *Wellenfunktion* selbst, manchmal auch die *Zeit*, ist oft eine *intrinsisch komplexe Zahl*.
  - Das ist schwer zu akzeptieren, aber das waren die irrationalen Zahlen auch. **Pythagoras** ließ einen seiner Schüler, der behauptete, daß es irrationale Zahlen *wirklich* gäbe, sogar hinrichten (heute ist es viel ungefährlicher, seinem Professor zu widersprechen).
- Obwohl komplexe Zahlen oft mit dem berühmten Mathematiker **Gauss** assoziiert werden, ist ihre Geschichte etwas älter. Insbesondere war Gerolama **Cardano** von großer Bedeutung . Er ist heute fast schon vergessen, seine Biographie aber ist so interessant, daß es sich lohnt sie kurz darzustellen.
- Diese Seite wird die wesentlichsten Grundlagen der komplexen Zahlen und ihre Nützlichkeit bei einigen Fragestellungen der klassischen Physik wiederholen. Die wichtigsten Stichworte dazu sind
  - *Definition und Eigenschaften komplexer Zahlen; Gaußsche Zahlenebene*.
  - *Eulersche Beziehung*.
  - *Einfache Beispiele zur Nützlichkeit der komplexen Zahlen*.
  - *Ausblick auf komplexe Funktionen*.
- Weiterführende Informationen finden Sie auch in einem reinen Mathematik-Skript

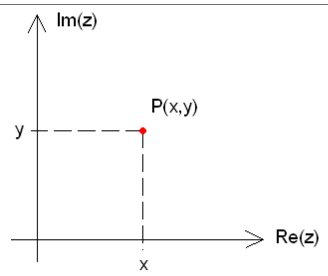
Definition und Eigenschaften komplexer Zahlen

Real- und Imaginärteil

- Komplexe Zahlen sind Zahlen der Form $z = x + iy$ wobei x und y reelle Zahlen sind. Die komplexen Zahlen stellen eine Erweiterung der reellen Zahlenmenge dar.
- Die imaginäre Einheit i genügt der Gleichung $i^2 = -1$. Daher gilt für die imaginäre Einheit $\mathbf{i = (-1)^{½}}$.
- Ist $z = x + iy$, so ist $\mathrm{Re}(z) = x$ der *Realteil* und $\mathrm{Im}(z) = y$ der *Imaginärteil* der komplexen Zahl z.
- *Achtung*: Nicht iy ist der Imaginärteil der komplexen Zahl z, sondern nur die *reelle* Zahl y.

Zahlenebene

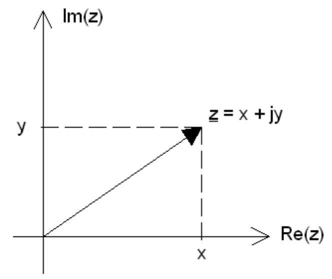
- Eine komplexe Zahl $z = x + iy$ läßt sich in der **Gaußschen Zahlenebene** durch einen Punkt **P** darstellen. Hierzu faßt man den Real- und den Imaginärteil der komplexen Zahl $z = x + iy$ als *kartesische Koordinaten* des Punktes **P** in der x,y-Ebene auf.



Darstellung einer komplexen Zahl durch einen Punkt in der Gaußschen Zahlenebene

- In den Anwendungen werden komplexe Zahlen meist durch sog. **Zeiger** dargestellt. Dabei handelt es sich um einen *Pfeil*, der vom Ursprung des Koordinatensystems zum Bildpunkt $\mathbf{P}(z)$ gerichtet ist.

- *Zeiger* werden oft durch Unterstreichen gekennzeichnet: $\underline{z} = x + iy$. Das führt aber zur Verwechslungsgefahr mit Vektoren, die zumindest in HTML auch durch unterstreichen dargestellt werden - und Zeiger sind zwar Pfeile, aber keine Vektoren!



Darstellung einer komplexen Zahl durch einen *Zeiger* in der Gaußschen Zahlenebene.

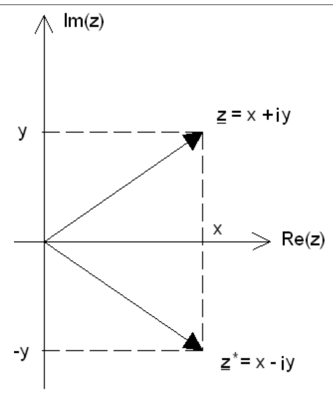
Hier ist zur Abwechslung mal das In der Elektrotechnik gebräuchliche Symbol j für die imaginäre Einheit gezeigt.

- **Achtung**: Der Zeiger $\underline{z}$ ist eine geometrische Darstellung der komplexen Zahl z und nicht mit einem *Vektor* zu verwechseln!

Konjugiert komplexe Zahlen; Betrag oder Modulus

- Die komplexe Zahl $z^* = x - iy$ ist die zu $z = x + iy$ *konjugiert* komplexe Zahl.
- Die zu einer komplexen Zahl konjugiert komplexe Zahl erhält man durch einen *Vorzeichenwechsel im Imaginärteil* von z, während der Realteil unverändert bleibt:
- $\mathrm{Re}(z^*) = \mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z^*) = -\mathrm{Im}(z)$

Die Entstehung der konjugiert komplexe Zahl z^* läßt sich in der Gaußschen Zahlenebene durch *Spiegelung* der komplexen Zahl z an der reellen Achse veranschaulichen.



Komplexe Zahl und die zu ihr konjugiert komplexe Zahl in der Gaußschen Zahlenebene

- Unter dem **Betrag** $|z|$ der komplexen Zahl $z = x + iy$ versteht man die *Länge des zugehörigen Zeigers* in der Gaußschen Zahlenebene:

$$|z| = \left(x^2 + y^2\right)^{1/2}$$

- Statt *Betrag* sagt man auch *Absolutbetrag* oder ***Modul***.

Eulersche Beziehung

Die Eulersche Beziehung ist eine der wichtigsten und merkwürdigsten Gleichungen der Mathematik. Sie verkoppelt **5** der wichtigsten Zahlen die es gibt, nämlich **0, 1, i,** π und **e**! Mehr darüber findet sich in spannender Form in den **Feynman Lectures**. Wir brauchen sie für alternative Darstellungen komplexer Zahlen.

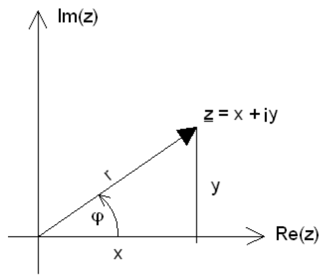
- Die Form $z = x + iy$ bezeichnet man als **Gaußsche** oder **kartesische Darstellung** einer komplexen Zahl. Daneben existieren noch zwei weitere Darstellungsformen: die *trigonometrische Form* und die *Eulersche Form*.
- In der **trigonometrischen Form** wird eine komplexe Zahl über ihre *Polarkoordinaten* **r** und φ festgelegt:

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

- Mit $r \in [0, \infty]$, $\varphi \in [\pi, -\pi]$
- Hierbei gilt:

r	=	**Betrag von z**
φ	=	**Argument, Winkel oder Phase von z**

Mit Hilfe der Transformationsgleichungen $x = r \cdot \cos\varphi$ und $y = r \cdot \sin\varphi$ kann man eine komplexe Zahl aus der kartesischen Form in die trigonometrische Form überführen.



Veranschaulichung der trigonometrischen Form einer komplexen Zahl

- Der Übergang von der komplexen Zahl z zu der konjugiert komplexen Zahl z^* entspricht in der trigonometrischen Darstellung einem Vorzeichenwechsel im Argument φ während der Betrag der komplexen Zahl konstant bleibt:.

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

$$z^* = r \cdot (\cos -\varphi + i \cdot \sin -\varphi)$$

$$= r \cdot (\cos\varphi - i \cdot \sin\varphi)$$

- Verwendet man die von **Euler** stammende Formel

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

- so erhält man aus der trigonometrischen Form die **Eulersche Form einer komplexen Zahl**:

$$z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$$

- Diese Schreibweise einer komplexen Zahl ist besonders vorteilhaft beim Ausführen von Multiplikationen und Divisionen.
- Die zu $z = r \cdot e^{i\varphi}$ gehörende konjugiert komplexe Zahl z^* lautet in Eulerscher Form

$$z^* = [r \cdot e^{i\varphi}]^* = r \cdot e^{-i\varphi}$$

Rechnen mit komplexen Zahlen

Addition, Subtraktion, Multiplikation und Divison

von komplexen Zahlen in verschiedenen Darstellungsformen:

- **Addition** und **Subtraktion** komplexer Zahlen in kartesischer Form:
  - Komplexe Zahlen können *nur* in kartesischer Form addiert/subtrahiert werden. Dies geschieht indem man ihre Realteile addiert/subtrahiert *und* ihre Imaginärteile addiert/subtrahiert.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i \cdot (y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i \cdot (y_1 - y_2)$$

- **Multiplikation, Division und Potenzen** komplexer Zahlen
- Multiplikation in *kartesischer Form*
- Es gelten die üblichen Multiplikationsregeln für Klammerausdrücke; danach muß nach Real- und Imaginärteil sortiert werden:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

- Multiplikation in *trigonometrischer Form*
  - Für die Ausführung von Multiplikationen erweist sich die trigonometrische Form oft als vorteilhafter als die kartesischer Form. Die sture Durchmultiplikation ergibt zunächst

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) \cdot r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$$

$$= (r_1 \cdot r_2) \cdot [(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

  - Dies läßt sich zusammenfassen zu einem klaren Bildunggesetz :

$$z_1 \cdot z_2 = z = r_1 \cdot e^{i\varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$$

$$= (r_1 \cdot r_2) \cdot e^{i \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)}$$

- *Division* komplexer Zahlen in *kartesischer Form*: Mühsam, aber klar.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{i \cdot (x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

  - *Division* komplexer Zahlen in *trigonometrischer Form* ist einfach und elegant.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)}{r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

$$= \frac{r_1 \cdot e^{i\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Potenzen und *Wurzeln* einer komplexen Zahl.

- Wendet man die Potenzgesetze auf $z = r \cdot e^{i\varphi}$ an, so erhält man die *Moivre-Formel*, welche angibt, wie man die **n-te** Potenz einer komplexen Zahl berechnet:

$$z^n = r^n \cdot e^{i\, n \cdot \varphi} = r^n \cdot (\cos n \cdot \varphi + i \sin n \cdot \varphi)$$

- Aus der Moivre-Formel läßt sich außerdem eine Formel zum Berechnen der **n-ten** *Wurzel* einer komplexen Zahl herleiten. **z** hat genau **n** verschiedene **n-te** Wurzeln w_0 bis w_{n-1}, die folgender Gleichung genügen

$$w_k = r^{1/n} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

$$k = 0 \ldots n-1$$

Natürlicher Logarithmus einer komplexen Zahl.

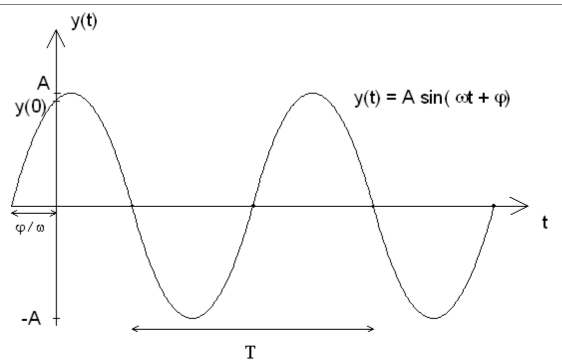
- Um den natürlichen Logarithmus einer komplexen Zahl berechnen zu können, ist es von Vorteil von der (erweiterten) Exponentialform $z = r \cdot e^{i \cdot (\varphi + 2k \cdot \pi)}$ der komplexen Zahl auszugehen, also eine "Phase" einzubauen. Daraus folgt

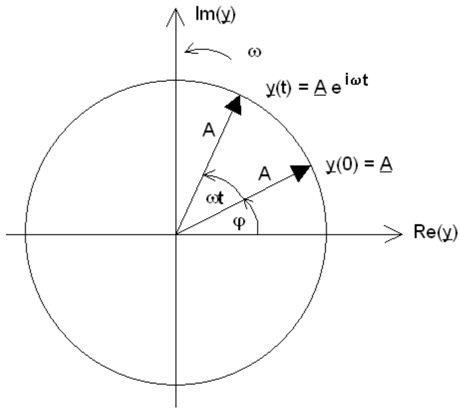
$$\begin{aligned} \ln z &= \ln [r \cdot e^{i(\varphi + 2k \cdot \pi)}] \\ &= \ln r + \ln e^{i(\varphi + 2k \cdot \pi)} \\ &= \ln r + i \cdot (\varphi + 2k \cdot \pi) \end{aligned}$$

Beispiele zur Nützlichkeit komplexer Zahlen

Zunächst brauchen wir die *Darstellung sinusförmiger Schwingungen mit Hilfe komplexer Zeiger*

- $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ beschreibt eine sich mit der Zeit sinusförmig verändernde Größe (Schwingung).
- Dabei ist A ist die Schwingungsamplitude, $\omega = 2\pi f$ die Kreisfrequenz und φ die Phase oder der Nullphasenwinkel.
- Die harmonische Schwingung $y(t)$ läßt sich durch einen komplexen Zeiger in der Gaußschen Zahlenebene darstellen. Der komplexe Zeiger besitzt die Länge A und rotiert im mathematisch positiven Drehsinn mit der Winkelgeschwindigkeit ω um den Ursprung des Koordinatensystems.





Darstellung eines harmonischen Schwingers durch einen rotierenden Zeiger

- Zum Zeitpunkt $\boldsymbol{t = 0}$ schließt der Zeiger $\underline{\boldsymbol{y}}$ mit der Bezugsachse (positive reelle Achse) den Nullphasenwinkel φ ein.
- In der Zeit $\boldsymbol{t}$ überstreicht der Zeiger den Winkel $\omega \boldsymbol{t}$. Die Lage des Winkels in der Gaußschen Zahlenebene läßt sich durch die zeitabhängige komplexe Zahl darstellen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{A} \cdot [\cos(\omega t + \varphi) + i \cdot \sin(\omega t + \varphi)] \\ &= \boldsymbol{A} \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t} \\ &= \underline{\boldsymbol{A}} \cdot e^{i\omega t} \end{aligned}$$

- Dabei ist

$\underline{A} = A \cdot e^{i\varphi}$	komplexe Amplitude (zeitunabhängig)
$e^{i\omega t}$	Zeitfunktion

- Die komplexe Amplitude$\underline{\boldsymbol{A}}$ ist zeitunabhängig; sie hat den Betrag $|\underline{A}| = A$ und den Phasenwinkel φ, welcher den Anfangswinkel des Zeigers festlegt.
- Die Zeitfunktion $e^{i\omega t}$ beschreibt die Rotation des Zeigers mit der Winkelgeschwindigkeit ω .
- Der Imaginärteil des rotierenden Zeigers $\underline{\boldsymbol{y}}$ entspricht dem *Momentanwert* der Sinusschwingung $\boldsymbol{y(t)}$ und damit der Projektion des Zeigers auf die Imaginärachse zum Zeitpunkt $\boldsymbol{t}$.

$$y(t) = \mathrm{Im}[\underline{A} \cdot e^{i\omega t}] = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Die *Überlagerung zweier gleichfrequenter Sinusschwingungen in komplexer Darstellung* zeigt nun wie praktisch diese Betrachtungsweise ist:

- Gegeben sind zwei Schwingungen gleicher Frequenz aber verschiedener Phase

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) \\ y_2 & \quad A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2) \end{aligned}$$

- Die ungestörte Überlagerung dieser Schwingungen ergibt nach dem Superpositionsprinzip eine Schwingung **y** gleicher Frequenz, aber mit zunächst unklarer Amplitude und Phase, d.h. $y = y_1 + y_2 = A_? \cdot \sin(\omega t + ?)$.

Man kann das natürlich mit den trigonometrischen Funktionen ausführen, aber die Amplitude $\boldsymbol{A}$ und die Phase ? der resultierenden Schwingung berechnet man weit einfacher in komplexer Schreibweise als mit **sin** und **cos** Funktionen - insbsondere wenn wir mehr als zwei Schwingungen überlagern.

- Dazu stellt man die Schwingungen y_1 und y_2 durch komplexe Zeiger dar:

$$\underline{y}_1 \rightarrow \underline{y}_1 = \underline{A}_1 \cdot e^{i\omega t}$$

$$\underline{y}_2 \rightarrow \underline{y}_2 = \underline{A}_2 \cdot e^{i\omega t}$$

- Für die komplexen Schwingungsamplituden $\underline{A}_1$ und $\underline{A}_2$ gilt:

$$\underline{A}_1 = A_1 \cdot e^{i\varphi_1}$$

$$\underline{A}_2 = A_2 \cdot e^{i\varphi_2}$$

- Anschließend überlagert man die komplexen Einzelschwingungen $\underline{y}_1$ und $\underline{y}_2$ durch schlichte *Addition*. Es folgt für $\underline{y}$:

$$\begin{aligned} \underline{y} &= \underline{A}_1 \cdot e^{i\omega t} + \underline{A}_2 \cdot e^{i\omega t} \\ &= (\underline{A}_1 + \underline{A}_2) \cdot e^{i\omega t} \\ &= \underline{A} \cdot e^{i\omega t} \end{aligned}$$

- Für die resultierende komplexe Amplitude gilt daher

$$\underline{A} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2$$

- Die gesuchte *Schwingung* (der zeitabhängige Teil) y entspricht dem Imaginärteil der berechneten komplexen Schwingung $\underline{y}$. Daher gilt:

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{Im}(\underline{y}) = \mathrm{Im}(\underline{A} \cdot e^{i\omega t}) \\ &= A \cdot \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Das war eine einfache Überlagerung zweier Schwingungen. Es ist einleuchtend, daß bei komplizierteren Problemen die komplexe Darstellung enorme Vorteile hat.

Schwingkreise in der Elektrotechnik

- In der Wechselstromtechnik geht man von sinusförmigen Strom- und Spannungsverläufen aus. Daher ist es möglich, Stom und Spannung als komplexe Zeiger in der Gaußschen Ebene zu betrachten

$$\underline{u} = 2^{½} \cdot \underline{U} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\underline{i} = 2^{½} \cdot \underline{I} \cdot e^{j\omega t}$$

- Den Quotienten aus der komplexen Spannung $\underline{u}$ und dem komplexen Strom $\underline{i}$ *(Achtung! Hierist, wie in der Elektrotechnik üblich **i** = Strom und **j** = (–1)^{½})* bezeichnet man als **Impedanz**oder **Scheinwiderstand $\underline{Z}$**

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = R + j \cdot X$$

- Für einen (ohmschen) Widerstand R gilt: $\underline{u} = R \cdot \underline{i}$. Daher besitzt ein ohmscher Widerstand die *reelle* Impedanz $\underline{Z}_R = R$.
- Für eine **Kapazität C** gilt der folgende Zusammenhang zwischen Strom und Spannung:

$$\underline{i} = C \cdot \frac{d\underline{u}}{dt}$$

- Damit erhält man für die *Impedanz der Kapazität* ***C*** folgenden Wert

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}$$

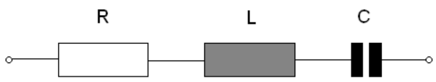
- Aus dem Induktionsgesetz erhält man folgenden Zusammenhang zwischen $\underline{u}$ und $\underline{i}$ für eine **Induktivität** ***L***.

$$\underline{u} = L \cdot \frac{d\underline{i}}{dt}$$

- Daraus ergibt sich folgende *rein imaginäre* Impedanz $\underline{Z}_L$ für die Induktivität

$$\underline{Z}_L = j \cdot \omega \cdot L$$

Mit Hilfe dieser Impedanzen lassen sich Wechselstromkreise *einfach* berechnen. Dazu betrachten wir als Beispiel folgenden Reihenschwingkreis aus einem Widerstand ***R***, einer Induktivität ***L*** und einer Kapazität ***C***:

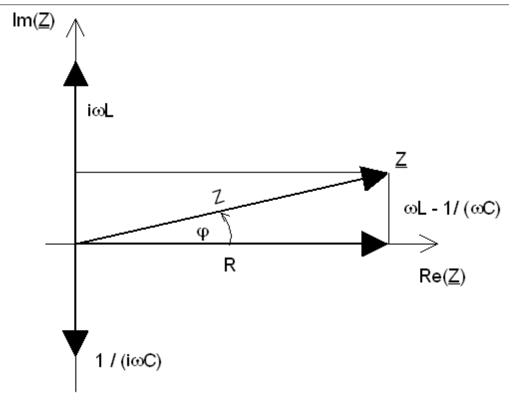


RLC-Reihenschwingkreis

- Nach den Kirchhoffschen Regeln erhält man die Gesamtimpedanz $\underline{Z}$ des Wechselstromkreises durch *Addition der Impedanzen* der drei Bauteile

$$\underline{Z} = R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = R + j \cdot \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right)$$

- Die folgende Abbildung zeigt die Lage der *Gesamtimpedanz* $\underline{Z}$ im Zeigerdiagramm, die sich aus der *graphischen Addition der einzelnen Zeiger* ergibt:



Zeigerdiagramm des Wechselstromkreises in Reihenschaltung

- Der *Wirkwiderstand* der Reihenschaltung ist der *Realteil* der Impedanz $\underline{Z}$; **Re (**$\underline{Z}$**) =** ***R***.
- Der *Blindwiderstand* der Reihenschaltung ist der Imaginärteil der Impedanz $\underline{Z}$; **Im (**$\underline{Z}$**) =** $\omega L - 1/\omega C$.

- Der reelle *Scheinwiderstand* ***Z*** ist der Betrag des komplexen Vektors ***Z***.
  Die Phasenverschiebung $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ zwischen Spannung und Strom läßt sich berechnen zu

$$\varphi = \arctan \frac{X}{R} = \arctan\left(\frac{\omega \cdot L - 1/\omega C}{R}\right)$$

- Das Verhältnis von $\underline{Z}_L$ zu $\underline{Z}_C$ bestimmt die Größe von φ und damit ob der Strom der Spannung nacheilt, ob die Spannung dem Strom nacheilt oder ob im Resonanzfall Strom und Spannung in Phase sind.

Ausblick auf komplexe Funktionen

Hat man erst mal komplexe Zahlen mit all ihren Darstellungsarten und Rechenregeln, lassen sich natürlich jetzt auch *Funktionen mit komplexen Variablen* definieren.

- Damit ist ein großes und (auch für die Materialwissenschaft) sehr wichtiges Gebiet der Mathematik definiert, die **Funktionentheorie**.
- Es ergeben sich völlig neue und wunderbare Beziehungen, eine davon wollen wir uns mal genauer anschauen. Dazu betrachten wir die Lösungen der *Poisson Gleichung*, der Grundgleichung der Elektrostatik, die uns in der Halbleiterei laufend begegnen wird.

Die **Poisson-Gleichung** der Elektrostatik lautet:

$$\Delta\Phi(x,y,z) = -\frac{\rho(x,y,z)}{\epsilon\epsilon_0}$$

- Mit Δ = Delta operator $(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2)$, $\Phi(x,y,z)$ = elektrostatisches Potential, $\rho(x,y,z)$ = Ladungsverteilung im Raum
- In *zwei* Dimensionen ist die Poissongleichung ein Spezialfall eines allgemeinen Typs von Differentialgleichungen der sehr häufig vorkommt: der **Laplace Gleichung**

$$\Delta\Phi = 0$$

ausgeschrieben

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0$$

- \- immer unter der Bedingung, daß Φ die spezifischen Randbedingungen erfüllt, auf irgendeiner Oberfläche konstant zu sein. Elektrostatisch heißt das z.B. einfach nur, daß die Oberfläche eines Leiters eine Äquipotentialfläche sein muß. Die Laplace - Gleichung ist damit eine typische Grundgleichung für viele *Randwertprobleme*.

Es gibt keinen einfachen Weg um die Laplace - Gleichung (zusammen mit der spezifischen Randbedingung) zu lösen. Analytisch klappt es nur für relativ einfache Oberflächen.

Jetzt betrachten wir mal eine *beliebige* komplexe Funktion **f(*z*)** mit der komplexen Variablen ***z = x* + i*y*** (und **i** ist wieder die imaginäre Einheit).

- Zum Beispiel

$$f(z) = z^2$$

$$f(z) = z \cdot \lg z$$

$$f(z) = \text{was immer einem einfällt}$$

- Für das erste Beispiel haben wir *ausgeschrieben*

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2ix \cdot y$$

- Setzen wir eine komplexe Zahl mit dem Wertepaar (***x, y***) ein, erhalten wir als Funktionswert eine neue komplexe Zahl.

f(*z*) läßt sich also auch *immer* schreiben als

$$f(z) = U(x, y) + i \cdot V(x, y)$$

- d.h. analog zur Darstellung der komplexen Zahl als Summe aus einer Funktion **U** die von *zwei reellen* Variablen ***x, y*** abhängt *plus* **i** mal eine andere Funktion **V**, die ebenfalls von den reellen Variablen ***x, y*** abhängt.

Das ist natürlich verallgemeinerbar: *Alle* komplexen Funktionen lassen sich so darstellen!

- Wir können also eine beliebige uns bekannte oder auch nur schreibbare Funktion **f(*x*)** nehmen, statt ***x*** die komplexe Zahl ***z*** substitutionieren, und - nach kürzerer oder länglicher Rechnung - damit *zwei reelle Funktionen generieren*: **U(*x,y*)** und **V(*x,y*)**.
- Und nun zum Überraschungseffekt:
- *Jede dieser unendlich vielen Funktionen **U(x,y)** und **V(x,y)** ist eine Lösung der Laplace Gleichung!*
- Wir wissen nur nicht, zu welchem konkreten Randwertproblem!

Den Beweis für diese Behauptung überlassen wir der Mathematik. Es sollte aber klar geworden sein, daß Funktionen komplexer Variablen für Überraschungen gut sind.

- Leicht verrückt: Wir kennen die Antwort - aber nicht die Frage! Wer das Kultbuch (so in den neunziger Jahren) "**The Hitchhikers Guide to the Galaxy**" von Douglas **Adams** (der in diesem Jahr (**2001**) gestorben ist) gelesen hat, wird sich jetzt fragen, ob Adams die Funktionentheorie kannte, denn das Buch (genauer gesagt alle **4** Bücher der Trilogie(?)) dreht sich genau um diese Frage:
- Die Antwort zu den letzten Fragen bezüglich des Leben, des Universums und überhaupt und so, ist bekannt; sie lautet: **42**. Nur die genaue Frage ist offen.